Devoir de Mathématiques numéro 2

Correction

Exercice 1 (d'après CCP TSI 2011, Maths 1 et Agro TB 2012)

Notons $h(x,t) = \dfrac{e^t}{x+t}$.

1) Pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0,1]$, $x + t > 0$ donc différent de 0 : $h(x,t)$ est bien définie.
De plus, à $x > 0$ fixé, $t \mapsto h(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) comme composée de fonctions continues, donc elle est intégrable sur $[0,1]$.
Conclusion : $\boxed{f(x) \text{ existe pour tout } x > 0}$

2) **a)** Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0,1]$, $e^t \geqslant 0$ ainsi

$$0 < x \leqslant y \Longrightarrow 0 < x + t \leqslant y + t \Longrightarrow \frac{1}{y+t} \leqslant \frac{1}{x+t} \Longrightarrow \frac{e^t}{y+t} \leqslant \frac{e^t}{x+t}$$

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [0,1],\ \dfrac{e^t}{y+t} \leqslant \dfrac{e^t}{x+t}}$.

b) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leqslant y$. Par croissance de l'intégrale,

$$\forall t \in [0,1],\ \frac{e^t}{y+t} \leqslant \frac{e^t}{x+t} \Longrightarrow f(y) = \int_0^1 \frac{e^t}{y+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,\mathrm{d}t = f(x)$$

Ainsi, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante}}$

3) Continuité. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

a) Soit $x \in \left[\dfrac{x_0}{2}, +\infty\right[$ et $t \in [0,1]$.

$$|h(x,t) - h(x_0,t)| = \frac{e^t|x - x_0|}{xx_0 + t(x + x_0) + t^2}$$

Or $t \geqslant 0$ et $x \geqslant x_0$, donc $xx_0 + t(x+x_0) + t^2 \geqslant xx_0 \geqslant x_0^2/2$. Ainsi

$$|h(x,t) - h(x_0,t)| = \frac{e^t|x - x_0|}{xx_0 + t(x + x_0) + t^2} \leqslant \frac{e^t|x-x_0|}{x_0^2/2} \leqslant \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}$$

En intégrant entre 0 et 1, il vient

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\int_0^1 h(x,t) - h(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |h(x,t) - h(x_0,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}\int_0^1 \mathrm{d}t$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \left[\dfrac{x_0}{2}, +\infty\right[,\quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{2e|x-x_0|}{x_0^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2} = 0$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est continue au point } x_0}$$

4) Soit x strictement positif. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{e^t}{x+1} \leqslant h(x,t) \leqslant \frac{e^t}{x}$$

Donc en intégrant entre 0 et 1, il vient

$$\boxed{\frac{e-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{e-1}{x}}$$

De plus, $\dfrac{e-1}{x} > 0$ donc en divisant $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} \leqslant 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} = 1$, c'est-à-dire $\boxed{f(x) \sim \dfrac{e-1}{x}}$ en $+\infty$.

5) Étude en 0

a) Soit $x > 0$ fixé. Le changement de variable $u = x + t$ s'écrit

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Finalement : $\boxed{f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u}$

b) Pour $x > 0$ posons $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$ et G la primitive de g s'annulant en 1. La fonction f s'écrit alors

$$f(x) = e^{-x}(G(x+1) - G(x))$$

Pour obtenir un développement (asymptotique) de G, nous allons commencer par obtenir celui de g :

$$g(x+1) = \frac{e^{x+1}}{x+1} = e\frac{e^x}{1+x} = e(1+o(1))(1+o(1)) = e + o(1)$$

Donc en intégrant $G(x+1) = G(1) + ex + o(x) = ex + o(x)$ *(Car on a choisi $G(1) = 0$)*

$$g(x) = \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + o(1)$$

Les petits o s'intègrent donc $G(x) = \ln x + K + x + o(x)$, avec $K = \lim\limits_{x\to 0}(G(x) - \ln x) = \displaystyle\int_1^0 \frac{e^t - 1}{t}\mathrm{d}t$.

De plus $e^{-x} \sim 1$, donc finalement

$$f(x) = e^{-x}(G(x+1) - G(x)) = e^x(-\ln x + o(\ln x)) \sim -\ln x$$

Conclusion : en 0, $\boxed{f(x) \sim -\ln x}$

c) Reprenons les développements de la question précédente à un ordre supérieur.

$$\begin{cases} g(x+1) = e\dfrac{e^x}{1+x} = e(1+x+o(x))(1-x+o(x)) = e + o(x) \\ g(x) = \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{1}{x} + 1 + \dfrac{x}{2} + o(x) \end{cases}$$

En intégrant les petits o précédents il vient,

$$\begin{cases} G(x+1) = ex + o(x^2) \\ G(x) = \ln x + K + x + \dfrac{x^2}{4} + o(x^2) \end{cases}$$

Or $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^2)$, donc en remplaçant dans l'expression de $f(x)$,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & e^{-x}(G(x+1) - G(x)) \\ & = & \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} o(x^2) +\right) \left(-\ln x - K + (e-1)x - \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\ & = & -\ln x - K + (e-1)x - \dfrac{x^2}{4} + o(x^2) \\ & & + x \ln x + Kx - (e-1)x^2 \\ & & + \dfrac{x^2}{2} \ln x - \dfrac{K}{2} x^2 \end{array}$$

Comme $x \ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, le $o(x^2)$ l'emporte sur le $o(x^3 \ln x)$ et absorbe le $x^3 \ln x$ (par contre il faut aller à l'ordre 3 dans e^{-x} pour être sûr). En regroupant,

$$\boxed{f(x) = -\ln x - K + x \ln x + (e - 1 + K)x + \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{3 - K - 4e}{4} x^2 + o(x^2)}$$

6) **a)** D'après 4, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et f sera au dessus de l'asymptote $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ (car $e - 1 > 0$). D'après 5b, $\lim\limits_{0} f = +\infty$ donc f admet une asymptote verticale en 0.