Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier l'existence de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

2) **a)** Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leqslant y$. Montrer que $\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{e^t}{y+t} \leqslant \dfrac{e^t}{x+t}$.

b) En déduire le sens de variation de f.

3) Continuité. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

a) Montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{x_0}{2}, +\infty\right[$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{2e|x - x_0|}{x_0^2}$.

b) En déduire que f est continue au point x_0.

4) Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{e-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{e-1}{x}$$

En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

5) Étude en 0

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) = e^{-x} \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u$.

b) Donner un équivalent simple de f en 0.

c) Donner un développement asymptotique en $o(x^2)$ de f en 0.

6) Représentation graphique : soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

a) Interpréter graphiquement les résultats des questions 4 et 5b.

b) Tracer $\mathscr{C}_f$.