Devoir de Mathématiques numéro 2.3

Exercice 1 (Petites mines 2012)

Convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

Solution. Soit $f(t) = \dfrac{\sin t}{\operatorname{sh} t}$. La fonction f est définie et continue sur $]0, +\infty[$ car composée de fonctions continues, donc elle en particulier continue par morceaux sur cet intervalle.

- Étude en $t = 0$:
  $f(t) \sim \dfrac{t}{t} = 1$ donc f est *prolongeable par continuité* en $t = 0$, donc $\boxed{\text{l'intégrale converge en } t = 0.}$
- Étude en $t \to +\infty$:
  Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{sh}(t)}$. Or $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(t)} \sim \dfrac{2}{e^t} = e^{-t}$ est d'intégrale convergente en $+\infty$ d'après *le critère des exponentielles* ($\beta = 1 > 0$), donc $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(t)}$ aussi, et par majoration l'intégrale de $f(t)$ est absolument convergente donc $\boxed{\text{convergente au voisinage de } +\infty.}$

Conclusion : $\boxed{\text{L'intégrale } I \text{ converge.}}$ □

Méthode alternative en $+\infty$:
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|t^2 f(t)| \leqslant \dfrac{2t^2}{e^t - e^{-t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ donc par encadrement $t^2 f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
Par définition de la limite, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $|t^2 f(t)| \leqslant 1$, donc tel que $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
Or d'après le *critère de Riemann* ($\alpha = 2 > 1$) l'intégrale de $\dfrac{1}{t^2}$ converge en $+\infty$, donc par majoration l'intégrale de $f(t)$ est absolument convergente donc $\boxed{\text{convergente au voisinage de } +\infty.}$