Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (PT 2014 C – partiel)

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{(n+1)!(n+1)n} = -\frac{1}{(n+1)!(n+1)n} < 0$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est strictement décroissante}}$

2) D'après 1), (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, et de plus

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$

Par conséquent d'après le théorème des suites adjacentes, $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite } \ell}$

3) Comme (u_n) est strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e$.
De même, (v_n) strictement décroissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e < v_n$.
En conclusion, $\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad u_q < e < v_q}$

4) Pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, $\dfrac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$, donc $N_q = q!u_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$.

En multipliant l'encadrement du 3) par $q!$ et en remplaçant e par $\dfrac{p}{q}$: $\qquad N_q < (q-1)!p < N_q + \dfrac{1}{q}$

Or dans les entiers, $a < b$ entraîne $a + 1 \leqslant b$, ainsi l'encadrement s'écrit

$$N_q + 1 \leqslant (q-1)!p < N_q + \underbrace{\frac{1}{q}}_{\leqslant 1} \leqslant N_q + 1$$

Ce qui est absurde : par conséquent, $\boxed{e \text{ est irrationnel}}$

Exercice 2

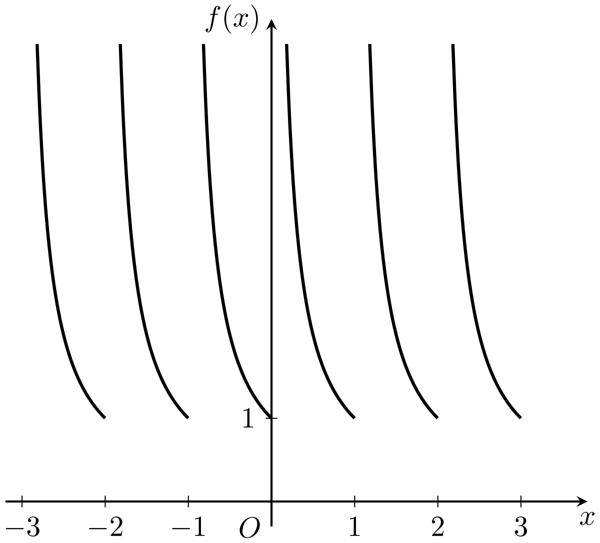
1) a) La fonction f n'est pas définie uniquement lorsque $x = \lfloor x \rfloor$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, donc

$$\forall x \in \mathscr{D}_f \qquad x + 1 \in \mathscr{D}_f \qquad \text{et} \qquad f(x+1) = \frac{1}{x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1)} = f(x)$$

Par suite, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est périodique de période 1.}}$

b) Sur chaque intervalle de la forme $]k, k+1[$ f est décroissante (translation de vecteur $(k, 0)$ de la courbe $y = 1/x$). $\lim\limits_{k^+} f = +\infty$ et $\lim\limits_{k^-} f = 1$.
Ainsi, $f(\mathscr{D}_f) = \text{Im } f =]1, +\infty[$.



c) <u>Irrationnel</u> : Raisonnons par contraposition. Soit $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) \in \mathbb{Q}$. Montrons que $x \in \mathbb{Q}$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} = \dfrac{p}{q}$. $f(x) \neq 0$ donc $x - \lfloor x \rfloor = \dfrac{q}{p}$, et finalement $x = \lfloor x \rfloor + \dfrac{q}{p} \in \mathbb{Q}$.

En conclusion, par contraposition, $\boxed{\text{pour tout nombre } x \text{ irrationnel } f(x) \text{ est irrationnel.}}$

<u>Rationnel</u> : Soit $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap \mathscr{D}_f = \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$. $f(x) = \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} = \dfrac{1}{\frac{p}{q} - \lfloor x \rfloor} = \dfrac{q}{p - q\lfloor x \rfloor} \in \mathbb{Q}$.

Donc $\boxed{\text{pour tout nombre } x \text{ rationnel non entier } f(x) \text{ est rationnel non entier.}}$

2) **a)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad x_n \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \text{ et } x_{n+1} \text{ bien défini.}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- <u>$\mathcal{H}_0$</u> : $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ par hypothèse, donc $x_0 \in \mathscr{D}_f$ et x_1 est bien défini.
- <u>$\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$</u> : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après 1)d), $x_{n+1} = f(x_n) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \subset \mathscr{D}_f$.
  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad x_n \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \text{ et } x_{n+1} \text{ bien défini.}}$

b) **i)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad x_n \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x_n > 1$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- <u>$\mathcal{H}_1$</u> : $x_0 \in \mathbb{Q}$ par hypothèse, donc $x_1 = f(x_0) \in \mathbb{Q}$ d'après 1)d). De plus, d'après 1)c), $\mathrm{Im}\, f =]1, +\infty[$ donc $x_1 = f(x_0) > 1$.
- <u>$\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$</u> : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
  D'après 1)d), $x_{n+1} = f(x_n) \in \mathbb{Q}$ et, d'après 1)c), $x_{n+1} = f(x_n) > 1$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad x_n \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x_n > 1}$

Remarque : on a supposé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n était bien défini, donc $f(x_n)$ existe toujours.

ii) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad v_n > 0 \quad \text{et} \quad x_n = \frac{u_n}{v_n}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- <u>$\mathcal{H}_0$</u> : Par définition, $x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$ et $v_0 \in \mathbb{N}^*$.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Écrivons la division euclidienne de u_n par $v_n > 0$:

$$u_n = qv_n + v_{n+1} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant v_{n+1} < v_n \quad \text{et} \quad q = \left\lfloor \frac{u_n}{v_n} \right\rfloor$$

En divisant par $v_n > 0$, il vient $\dfrac{u_n}{v_n} - \left\lfloor \dfrac{u_n}{v_n} \right\rfloor = \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$ par définition de u_{n+1}.

Si $v_{n+1} = 0$, $\dfrac{u_n}{v_n} - \left\lfloor \dfrac{u_n}{v_n} \right\rfloor = x_n - \lfloor x_n \rfloor = 0$ et $f(x_n) = \dfrac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}$ n'est pas défini, ce qui est absurde.

D'où $v_{n+1} > 0$ et $x_{n+1} = f(x_n) = \dfrac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor} = \dfrac{1}{v_{n+1}/u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad v_n > 0 \quad \text{et} \quad x_n = \dfrac{u_n}{v_n}}$

iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} est le reste de la division euclidienne par v_n, donc $v_{n+1} < v_n$: $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement décroissante.}}$ *(On pouvait aussi partir de $v_n > 0$ et $x_n > 1$)*

Or (v_n) est minorée par 0 d'après ii), donc convergente. Mais une suite d'entier convergente est stationnaire, ce qui est contradictoire avec la stricte décroissance de (v_n). Donc on ne peut pas supposer que x_n est bien défini lorsque $x_0 \in \mathbb{Q}$:

$\boxed{\text{Au bout d'un nombre d'étapes fini } n, \text{ on trouve } x_n \in \mathbb{Z}.}$

c) *(C'est une question de synthèse, qui n'utilise que le résultat des questions a) et b), et peut donc se faire en admettant ces résultats.)*

D'après a), $x_0 \notin \mathbb{Q}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini.

D'après b), $x_0 \in \mathbb{Q}$ implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que x_n n'est pas défini. Donc par contraposition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini implique $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Finalement,

$\boxed{x_0 \notin \mathbb{Q} \text{ est une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n \text{ soit bien défini.}}$

3) **a)**
```
import math as m

def f(x):
  return 1/(x-m.floor(x))

def calcul_x(x0,n):
  if n == 0:
    return x0
  else:
    return f(calcul_x(n-1))

def calcul_a(x0,n):
  return m.floor(calcul_x(x0,n))
```
la fonction `f` retournera un erreur de type division par 0 si elle est évaluée sur un entier. On peut préférer faire un `assert`.

b) **i)** On trouve $a_0 = 1$ puis $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2$. On peut conjecturer que $a_n = 2$ pour tout $n \geqslant 1$.

ii) $x_1 = f(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2} - \lfloor \sqrt{2} \rfloor} = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1} = 1 + \sqrt{2}$.

$x_2 = f(x_1) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{2} - \lfloor 1 + \sqrt{2} \rfloor} = \dfrac{1}{\sqrt{2} - \lfloor \sqrt{2} \rfloor} = x_1$.

Donc x_1 est un point fixe de la fonction f : $f(x_1) = x_1$. Ainsi, une récurrence immédiate nous montre que $\boxed{x_n = x_1 \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$

Par conséquent, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ a_n = \lfloor x_n \rfloor = \lfloor x_1 \rfloor = 2}$

iii) La procédure nous donne $a_0 = 1$, $a_1 = a_3 = 1$ et $a_2 = a_4 = 2$.

On conjecture une suite périodique $\boxed{a_{2n} = 2 \text{ et } a_{2n-1} = 1 \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad x_{2n} = x_2 = 1+\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_{2n-1} = x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $x_1 = f(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

  $x_2 = f(x_1) = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1-2\lfloor\frac{1+\sqrt{3}}{2}\rfloor} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = 1+\sqrt{3}$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

  $x_{2(n+1)-1} = x_{2n+1} = f(x_{2n}) = f(1+\sqrt{3}) = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}-\lfloor\sqrt{3}\rfloor-1} = f(x_0) = x_1$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad x_{2n} = x_2 \quad \text{et} \quad x_{2n-1} = x_1}$

c) **i)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad p_{n-1} \in \mathbb{N} \qquad q_{n-1} \in \mathbb{N} \qquad p_n \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad q_n \in \mathbb{N}^*$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$. Attention, il est nécessaire et fondamental que $\mathcal{H}_n$ porte aussi sur le rang $n-1$ de (p_n) et (q_n). En particulier, l'initialisation est modifiée.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: les (a_n) sont des entiers, donc p_0, p_1, q_0 et q_1 aussi. de plus a_0 est positif car x_0 l'est, et a_1 est plus grand que 1 car c'est la partie entière de $x_1 = f(x_0) \in [1, +\infty[$. Donc p_0 et q_0 sont positifs, et p_1 et q_1 strictement positifs : $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Comme a_{n+1} est un entier strictement positif, que p_{n-1} et q_{n-1} sont aussi des entiers strictement positifs, et que p_{n-2} et q_{n-2} sont des entiers positifs, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad p_n \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad q_n \in \mathbb{N}^*}$

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls.

ii) La suite (q_n) est strictement positive pour tout n, d'après i) et puisque $q_0 = 1 > 0$. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} > a_n \geqslant 1$$

Donc $\boxed{(q_n) \text{ est strictement croissante à partir de } n = 1.}$

Par conséquence, pour tout $n \geqslant 2$, $q_n - q_{n-1} > 0$, ce qui dans les entiers implique $q_n - q_{n-1} \geqslant 1$. En sommant, on obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} q_k - q_{k-1} = q_n - q_1 \geqslant n-1$. Or $q_1 = a_1 \geqslant 1$, d'où le résultat $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ q_n \geqslant n.}$

iii) Soit $D_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$. Montrons que la suite $(D_n)_n$ est géométrique de raison -1 : pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} D_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1} \\ &= p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1} = -D_{n-1} \end{aligned}$$

De plus $D_1 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1 = 1$.

En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = D_n = (-1)^{n-1}.}$

On peut aussi le voir avec des déterminants :

$$D_n = \det\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_n p_{n-1} + p_{n-2} & p_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} = -D_{n-1}$$

.

iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n = \dfrac{p_n + p_{n+1}x_{n+2}}{q_n + q_{n+1}x_{n+2}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \frac{p_n + p_{n+1}\frac{1}{x_{n+1}-a_{n+1}}}{q_n + q_{n+1}\frac{1}{x_{n+1}-a_{n+1}}} = \frac{(x_{n+1}-a_{n+1})p_n + p_{n+1}}{(x_{n+1}-a_{n+1})q_n + q_{n+1}}$$

Or $-a_{n+1}p_n + p_{n+1} = p_{n-1}$ et de même pour (q_n). Ainsi $U_n = \dfrac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} = U_{n-1}$.

La suite (U_n) est donc constante, et $U_0 = x_0$, d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_0 = \dfrac{p_n + p_{n+1}x_{n+2}}{q_n + q_{n+1}x_{n+2}}.}$

d) **i)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n - r_{n-1} = \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}$ d'après c)iii).

ii) d'après c)ii), pour tout $n \geqslant 1$, $q_n \geqslant n$. Donc (tout est strictement positif), $\dfrac{1}{q_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, puis par produit

$$\frac{1}{q_nq_{n-1}} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$$

Or $\dfrac{1}{n(n-1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge par équivalence avec une série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$). Puis, par majoration, $\sum \dfrac{1}{q_nq_{n-1}}$ converge.

Ainsi, $\boxed{\text{la série de terme général } r_n - r_{n-1} \text{ converge absolument donc converge.}}$

iii) La série de terme général $r_n - r_{n-1}$ est convergente, c'est-à-dire que la suite des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(r_k - r_{k-1}) = r_n - r_0$ converge. Donc $\boxed{\text{la suite } (r_n) \text{ converge.}}$

iv) Montrons que (r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont deux suites adjacentes : Comme (q_n) croissante,

- $\forall n \geqslant 1$, $r_{2n+2} - r_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n+2}q_{2n+1}} + \dfrac{(-1)^{2n}}{q_{2n+1}q_{2n}} = \dfrac{1}{q_{2n+1}}\left(-\dfrac{1}{q_{2n+2}} + \dfrac{1}{q_{2n}}\right) \geqslant 0$
  Donc (r_{2n}) est croissante.
- De même, $\forall n \geqslant 0$, $r_{2n+3} - r_{2n+1} = \dfrac{1}{q_{2n+2}}\left(\dfrac{1}{q_{2n+3}} - \dfrac{1}{q_{2n+1}}\right) \leqslant 0$ et (r_{2n+1}) décroissante.
- $r_{2n+1} - r_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc les suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergent vers une même limite r (ce que l'on sait déjà d'après iii)) en vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad r_{2n} \leqslant r \leqslant r_{2n+1}$$

Puisque r est appartient à l'intervalle de bornes r_n et r_{n+1}, la longueur $|r - r_n|$ est plus petite que la longueur de l'intervalle, c'est-à-dire $|r_{n+1} - r_n| = \dfrac{1}{q_nq_{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{q_n^2}$.

En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|r - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{q_n^2}.}$

On a donc approché r avec une précision que l'on peut contrôler.

4) **a)** Supposons x_0 irrationnel. Alors $x_0 \neq -\delta \in \mathbb{Z}$, donc y_0 bien défini. Supposons de plus $y_0 = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$y_0 = g(x_0) = \alpha + \frac{1}{x_0 + \delta}$$

Donc $x_0 = -\delta + \dfrac{1}{y_0 - \alpha} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.

Conclusion : $\boxed{\text{Le nombre réel } y_0 = g(x_0) \text{ est bien défini et irrationnel.}}$

b) Par hypothèse, $x_0 > 0$ et $\delta \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{x_0+\delta} < 1$, ainsi $\alpha \leqslant y_0 = \alpha + \dfrac{1}{x_0+\delta} < \alpha + 1$. Puisque $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\boxed{b_0 = \lfloor y_0 \rfloor = \alpha.}$ De plus

$$y_1 = f(y_0) = \frac{1}{y_0 - \lfloor y_0 \rfloor} = \frac{1}{y_0 - \alpha} = x_0 + \delta$$

Donc, comme $\delta \in \mathbb{Z}$, $\boxed{b_1 = \lfloor f(y_0) \rfloor = \lfloor x_0 + \delta \rfloor = a_0 + \delta}$

Ainsi, $y_2 = f(y_1) = \dfrac{1}{x_0 + \delta - (a_0 + \delta)} = x_1$.

Les suites $(y_{n-1})_{n\geqslant 2}$ et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ sont définie par la même relation de récurrence et ont même premier terme, donc sont égales.

Par suite, leurs parties entières sont égales : $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2,\ a_{n-1} = b_n.}$

5) a) Raisonnons par l'absurde. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta = (\delta + \alpha)^2 + 4 = n^2$.

On a $n^2 \geqslant (1+1)^2 + 4 = 8$ donc $n \geqslant 3$.

De plus, $n^2 - (\delta+\alpha)^2 = 4$ donc $(n - (\delta+\alpha))(n + \delta + \alpha) = 4$. Or $(n + \delta + \alpha) \geqslant 3 + 1 + 1 = 5$. On vient donc d'écrire 4 comme produit de deux entiers dont l'un est plus grand que 5 : c'est absurde. Par conséquent, $\boxed{\Delta \text{ n'est pas le carré d'un entier.}}$

b) On calcule le discriminant : $(\delta - \alpha)^2 + 4(\alpha\delta + 1) = \delta^2 + 2\alpha\delta + \alpha^2 + 4 = \Delta > 0$. Donc retrouve donc le Δ de la question précédente : $\sqrt{\Delta}$ est irrationnel.

L'équation a deux solutions distinctes ($\Delta > 0$), $\dfrac{1}{2}(\alpha - \delta \pm \sqrt{\Delta})$. Or $\Delta \geqslant |\delta - \alpha|$ donc l'unique solution positive est $\boxed{z_0 = \dfrac{1}{2}(\alpha - \delta + \sqrt{\Delta}).}$

c) $\dfrac{1}{z_0+\delta} = \dfrac{2}{\alpha - \delta + \sqrt{\Delta} + 2\delta} = \dfrac{2(\alpha + \delta - \sqrt{\Delta})}{(\alpha+\delta)^2 - ((\delta+\alpha)^2 + 4)} = \dfrac{1}{2}(-(\alpha+\delta) + \sqrt{\Delta})$.

Donc $g(z_0) = \alpha + \dfrac{1}{z_0 + \delta} = z_0$

On pouvait aussi remarquer que $g(x) = x \iff (x^2 + (\delta - \alpha)x - \alpha\delta - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x \neq \delta)$.

Il y a souvent des questions faciles y compris en fin de sujet. Garder quelques minutes en fin d'épreuve pour les faire peut être une bonne stratégie.

d) D'après 4)b), le développement en fraction continue de $g(z_0)$ s'obtient, à partir de $n = 2$, par un décalage d'indice dans celui de z_0. Or $z_0 = g(z_0)$, donc $a_n = b_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{Le développement en fraction continue } (a_n) \text{ du nombre } z_0 \text{ est constant à partir de } n = 1.}$

e) $z_0 = \dfrac{\alpha - \delta}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\delta + \alpha}{2}\right)^2 + 1}$, donc en posant $\alpha = \delta = p \in \mathbb{N}^*$, il vient $z_0 = \sqrt{p^2 + 1}$.

Par conséquent, en appliquant le résultat de la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il vient

$\boxed{\text{Le développement en fraction continue de } \sqrt{p^2+1} \text{ est constant à partir de } n = 1.}$

Plus précisément, on a $a_0 = \alpha = p$, puis $a_1 = a_n = \delta + \alpha = 2p$.