Devoir de Mathématiques numéro 1

Exercice 1

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$$

1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement monotones, et donner leur sens de variation.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent.

3) On admettra que leur limite est $e = \exp(1)$. En déduire que, pour tout entier naturel q non nul,

$$u_q < e < v_q$$

4) On cherche à montrer que e est irrationnel. À cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q, premiers entre eux, tels que $e = \frac{p}{q}$.

En multipliant la double inégalité précédente par $q!$, montrer que c'est impossible, et conclure sur l'irrationalité de e.

Exercice 2

Définitions et notations :

- On dit qu'un nombre réel x est rationnel s'il existe deux entiers relatifs p et q (avec $q \neq 0$) tels que $x = \frac{p}{q}$.
- On dit qu'un nombre réel x est irrationnel s'il n'est pas rationnel.
- L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
- Pour tout nombre réel x, on appelle partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur à x : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < 1 + \lfloor x \rfloor$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$.

1) **a)** Déterminer l'ensemble de définition de f. Montrer que f est périodique de période 1.

b) Étudier f ; on précisera en particulier ses variations, son ensemble image et on tracera son graphe dans un repère orthonormé.

c) Démontrer que pour tout nombre x irrationnel (resp. rationnel non entier), $f(x)$ est irrationnel (resp. rationnel).

2) On pose $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 > 0$ et on s'intéresse lorsque cela est possible à la suite (x_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

a) On suppose dans cette question que $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini.

b) On suppose dans cette question que $x_0 \in \mathbb{Q}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini.

On considère u_0 et v_0 deux entiers naturels non nuls tels que $x_0 = \frac{u_0}{v_0}$.

i) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$.

ii) On définit par récurrence deux suites d'entiers (u_n) et (v_n) en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = v_n$ et v_{n+1} égal au reste de la division euclidienne de u_n par v_n lorsque v_n est non nul, et 0 sinon. Démontrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

iii) Démontrer que la suite (v_n) est strictement décroissante. Que peut-on conclure, l'hypothèse faite au début du b) est-elle possible ?

c) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur x_0 pour que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n soit bien défini.

3) On fixe dans toute cette partie $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tel que $x_0 > 0$. On considère la suite (x_n) définie au 2)a) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \lfloor x_n \rfloor$.
La suite des entiers (a_n) est appelée développement en fraction continue de x_0.

a) Écrire un programme Python d'argument x_0 et n donnant a_n.

b) On pose dans cette question $x_0 = \sqrt{2}$ (on admettra que c'est un irrationnel).

i) Tester l'algorithme du a) pour $x_0 = \sqrt{2}$ et n valant successivement 0, 1, 2, 3 et 4. Donner les valeurs de a_n obtenues. Quelle conjecture peut-on formuler ?

ii) Calculer exactement les valeurs de x_1, x_2. En déduire que la suite (x_n) est stationnaire, puis démontrer la conjecture du a).

iii) Reprendre les 2 questions précédentes avec $x_0' = \sqrt{3}$ (on admettra que c'est un irrationnel).

c) On définit deux suites (p_n) et (q_n) par

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_0 & = & a_0 \\ q_0 & = & 1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{lcl} p_1 & = & a_0 a_1 + 1 \\ q_1 & = & a_1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2 \left\{\begin{array}{lcl} p_n & = & a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n & = & a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{array}\right.$$

i) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls.

ii) Démontrer que la suite (q_n) est strictement croissante. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant n$.

iii) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$.

iv) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 = \dfrac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}}$.

d) On définit une suite de rationnels (r_n) par $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

i) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n - r_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$.

ii) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (r_k - r_{k-1})$ converge (on pourra passer par de la convergence absolue).

iii) En déduire que la suite (r_n) converge.

iv) On note r la limite de (r_n). Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, r est compris entre r_n et r_{n+1} et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| r - \dfrac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \dfrac{1}{q_n^2}$. Indication : *Étudier les suites* (r_{2n}) *et* (r_{2n+1})

4) On considère un nombre irrationnel x_0, deux nombres entiers α et δ strictement positifs, et on pose pour tout x réel différent de $-\delta$

$$g(x) = \alpha + \frac{1}{x + \delta}$$

a) Démontrer que le nombre réel $y_0 = g(x_0)$ est bien défini et qu'il est irrationnel.

b) On note respectivement (a_n) et (b_n) les développements en fraction continue de x_0 et y_0 définis au 3). Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n-1} = b_n$.

5) On considère deux entiers α et δ strictement positifs et on pose : $\Delta = (\delta + \alpha)^2 + 4$.

a) Démontrer que Δ n'est pas le carré d'un entier. On en déduit et on l'admettra que $\sqrt{\Delta}$ est un nombre irrationnel.

b) Démontrer que l'équation du second degré $x^2 + (\delta - \alpha)x - \alpha\delta - 1 = 0$ possède deux solutions réelles distinctes toutes les deux irrationnelles dont l'une, notée z_0, est strictement positive.

c) Démontrer que $z_0 = g(z_0)$.

d) Que peut-on en déduire quant au développement en fraction continue du nombre z_0 ?

e) Que peut-on dire du développement en fraction continue de $\sqrt{p^2+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$?