Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (CAPES interne 2007)

Partie 1 (Majorations, minorations, encadrements)

1) $\boxed{\operatorname{ch}(0) = \dfrac{1+1}{2} = 1}$ et $\boxed{\operatorname{sh}(0) = \dfrac{1-1}{2} = 0}$

2) Pour ces deux fonctions, le domaine de défintion est $\mathbb{R}$, qui est symétriqe par rapport à 0.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \operatorname{ch}(x) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\operatorname{sh}(x)$$

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction ch est paire et la fonction sh est impaire.}}$

3) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $[\operatorname{ch}(x)]^2 - [\operatorname{sh}(x)]^2 = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = 1$;
- Comme $\exp \geqslant 0$, $\operatorname{ch} \geqslant 0$. De plus, d'après ci-dessus, $\operatorname{ch}^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 \geqslant 1$.
  Donc $\boxed{\operatorname{ch}(x) \geqslant 1}$

b) La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car exp l'est), et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$.
D'après 3)a) ci-dessus, $\operatorname{ch} \geqslant 1 > 0$. Donc sh est strictement croissante.
D'après 1), $\operatorname{sh}(0) = 0$, donc $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{sh}(x) \geqslant 0.}$
Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{ch}(x) - e^{-x}$, et comme $\exp > 0$, $\boxed{\operatorname{sh}(x) < \operatorname{ch}(x)}$

4) **a)** La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.

$$\boxed{\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}}$$

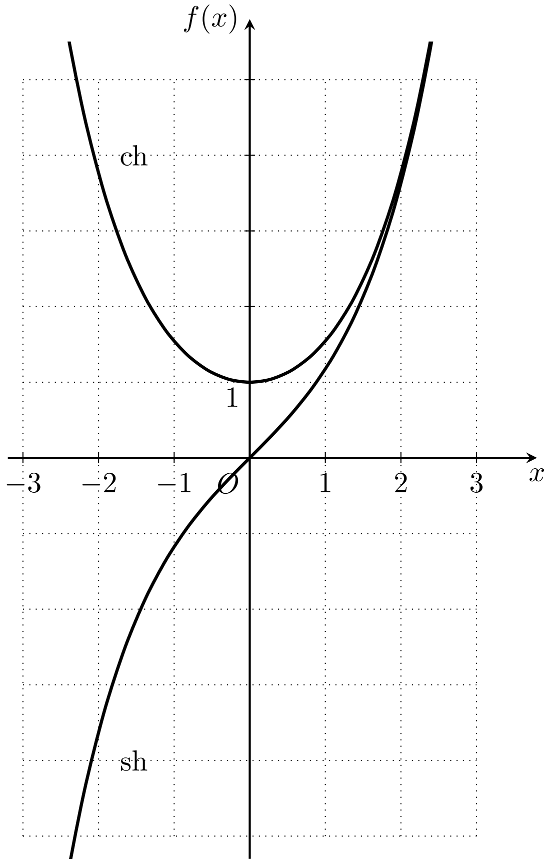
b) $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \geqslant 1 > 0$ ce qui donne le premier tableau de variations, dont on déduit le second ;

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}'(x)$		$+$		$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En $+\infty$, $\operatorname{ch}(x) \sim \dfrac{e^x}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) \sim \dfrac{e^x}{2}$, d'où les limites. On complète par parité.

c) Il faut évidemment respecter les tableaux de variations et l'inégalité $\operatorname{sh} < \operatorname{ch}$.



5) **a)** *Deux méthodes : soit montrer $g(x) = \mathrm{sh}\,(x) - x \geqslant 0$ via une étude de fonction, soit intégrer des inégalités (entre a et b, avec $a < b$).*

D'après 3)a), pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \mathrm{ch}\,(t)$.

Donc en intégrant entre 0 et $x \geqslant 0$ cette inégalité, il vient

$$x = \int_0^x 1 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^t \mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{sh}\,(x) - \mathrm{sh}\,(0) = \mathrm{sh}\,(x)$$

Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ positif, on a : } x \leqslant \mathrm{sh}\,(x).}$

b) Soit $x \geqslant 0$. On intègre entre 0 et x l'inégalité précédente :

$$\frac{x^2}{2} = \int_0^x t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{ch}\,(x) - \mathrm{ch}\,(0)$$

D'où $\boxed{1 + \dfrac{x^2}{2} \leqslant \mathrm{ch}\,(x)}$

On intègre à nouveau cette inégalité entre 0 et x, il vient $\boxed{x + \dfrac{x^3}{6} \leqslant \mathrm{sh}\,(x)}$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leqslant \mathrm{ch}\,(x) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leqslant \mathrm{sh}\,(x)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Ce sont les inégalités montrées en 3)a) et 5)a).
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

  En intégrant entre 0 et x l'inégalité pour sh on trouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \leqslant \mathrm{ch}\,(x) - 1$

  D'où, après un décalage d'indice et en passant le 1 de l'autre coté, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leqslant \mathrm{ch}\,(x)$

En intégrant à nouveau cette inégalité, qui est vraie pour tout $x \geqslant 0$, entre 0 et $x \geqslant 0$, il vient

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leqslant \operatorname{sh}(x)$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leqslant \operatorname{ch}(x) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leqslant \operatorname{sh}(x)}$

6) **a)** Démontrer que, pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :

- La fonction ch est croissante sur $[0,1]$, donc pour tout $x \in [0,1]$, $\operatorname{ch}(x) \leqslant \operatorname{ch}(1) = \dfrac{e+e^{-1}}{2}$.
  De plus, $e \leqslant 3$ et $e^{-1} \leqslant 1$, donc pour tout $x \in [0,1]$, $\operatorname{ch}(x) \leqslant 2$.
  De même[1] qu'à la question 5), en intégrant entre 0 et $x \leqslant 1$, il vient $\boxed{\operatorname{sh}(x) \leqslant 2x}$
- De même, en intégrant l'inégalité précédente entre 0 et $x \leqslant 1$, il vient $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(1) \leqslant x^2$ puis $\boxed{\operatorname{ch}(x) \leqslant 1 + x^2}$

b) De même, pour tout réel x compris entre 0 et 1 :

- $\operatorname{sh}(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x 1 + t^2 \,\mathrm{d}t = x + \frac{x^3}{3}$;
- $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(0) \leqslant \displaystyle\int_0^x t + \frac{t^3}{3} \,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}$. D'où $\operatorname{ch}(x) \leqslant 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12}$.

c) Soit x compris entre 0 et 1. D'après 5)b), $0 \leqslant \operatorname{ch}(x) - (1 + \frac{x^2}{2})$. D'après 6)b), $\operatorname{ch}(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leqslant \frac{x^4}{12}$.

Comme $x^4 \leqslant 1$, on a : $\boxed{0 \leqslant \operatorname{ch}(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{12}}$

D'après 5)b) et 6)b), $0 \leqslant \operatorname{sh}(x) - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \leqslant \frac{x^3}{6} \leqslant \frac{1}{6}$.

Partie 2 (Vers une approximation de la fonction ch par des fonctions polynômes)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'intégration par partie s'écrit $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(t)\,\mathrm{d}t = \big[-(x-t)\operatorname{sh}(t)\big]_0^x + \int_0^x \operatorname{ch}(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Donc, comme $\operatorname{ch}(0) = 1$,

$$\boxed{\operatorname{ch}(x) = 1 + \int_0^x (x-t)\operatorname{ch}(t)\,\mathrm{d}t}$$

2) *C'est la démonstration de la formule de Taylor reste intégral dans le cas particulier de* ch *, avec n impaire.*

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\operatorname{ch}(t)\,\mathrm{d}t$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Montré en 1).

1. La n-ième fois que vous faites le même raisonnement dans une même copie, abrégez à coup de « de même ».

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. On effectue deux intégrations par partie.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \Big[-\frac{(x-t)^{(2n+2)}}{(2n+2)!}\,\mathrm{ch}\,(t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^{(2n+2)}}{(2n+2)!}\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{\Big[-\frac{(x-t)^{(2n+3)}}{(2n+3)!}\,\mathrm{sh}\,(t)\Big]_0^x}_{=0} - \int_0^x \frac{(x-t)^{(2n+3)}}{(2n+3)!}\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{(2(n+1)+1)}}{(2(n+1)+1)!}\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $a \geqslant 0$, pour tout $t \in [0,a]$, $a - t \geqslant 0$ donc

$$\forall t \in [0,a] \quad 0 \leqslant \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\mathrm{ch}\,(t) \leqslant \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sup_{t\in[0,a]} \mathrm{ch}\,(t) = \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\mathrm{ch}\,(a)$$

En intégrant entre 0 et a, il vient

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\mathrm{ch}\,(a)}$$

4) **a)** Comme $a \neq 0$, $u_n > 0$. En particulier $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

De plus, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc, par définition de la limite, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a :

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}}$$

b) Soit N qui convient. Soit $n \geqslant N$ fixé. Pour tout $k \in [\![N, n-1]\!]$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{1}{2}$.

Donc en faisant le produit des inégalités, on trouve $\frac{u_n}{u_N} = \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-N+1} = \frac{1}{2^{n-N}}$.

Finalement, comme $u_N > 0$, $\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } N,\ u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-N}} u_N}$

c) D'après 4)a) et b), $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-N}} u_N$ pour tout $n \geqslant N$.

Par conséquent, par encadrement $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

5) D'après 4)c), $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\mathrm{ch}\,(a) = 0$. Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Ainsi, la formule trouvée au 2) s'écrit, pour $x = a > 0$,

$$\mathrm{ch}\,(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{\int_0^a \frac{(a-t)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

En conclusion, $\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \mathrm{ch}\,(a).}$

Partie 3 (Les fonctions ch **et** sh **et l'hyperbole)**

1) Notons $\mathscr{C} = \{(x, f(x)) \mid x \in [1, +\infty[\}$ le graphe de f. Montrons que $\mathscr{C} = \mathcal{H}^+$ par double inclusion.

$\boxed{\subset}$. Soit $(x, y) \in \mathscr{C}$. Comme $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $y^2 = x^2 - 1$ puis $x^2 - y^2 = 1$. Donc $(x, y) \in \mathcal{H}^+$.
Ainsi, $\mathscr{C} \subset \mathcal{H}^+$.

$\boxed{\supset}$. Soit $(x, y) \in \mathcal{H}^+$. Donc $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $x^2 - y^2 = 1$.
Donc $y^2 = x^2 - 1$: comme $y^2 \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, $x \in [1, +\infty[$.
De plus, $y = +\sqrt{x^2 - 1}$ car $y \geqslant 0$. Donc $(x, y) \in \mathscr{C}$.
Ainsi, $\mathcal{H}^+ \subset \mathscr{C}$.

Par double inclusion, $\boxed{\text{La courbe } \mathcal{H}^+ \text{ est la courbe représentative dans le repère } (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}) \text{ de } f.}$

2) On vient de montrer que $\mathcal{H}^+$ est la courbe de f. Or, au voisinage de $+\infty$, un DL en $\dfrac{1}{x}$ donne

$$f(x) - x = x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1\right) = x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2} - 1\Big)\right) \sim \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Donc $\boxed{\text{La droite } y = x \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{H}^+.}$

3) La courbe $\mathcal{H}$ est stable par les transformations $(x, y) \mapsto (-x, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, -y)$.
De plus, on peut obtenir tout le plan à partir de $(\mathbb{R}_+)^2$ via l'enchaînement de ces deux transformations.
Donc $\boxed{\mathcal{H} \text{ peut être obtenue à partir de } \mathcal{H}^+ \text{ par les symétries par rapport aux axes des } x \text{ et des } y.}$

4) Laissé en exercice : tracer une hyperbole...

5) **a)** Soit $x \geqslant 1$ fixé. Notons $\widetilde{\mathscr{A}}(x)$ l'aire de la même portion du plan que $\mathscr{A}(x)$, mais pour les x et y positifs. Par symétrie, $\mathscr{A}(x) = 4\widetilde{\mathscr{A}}(x)$.

De plus l'aire du rectangle de sommets M et O est $xy = xf(x)$, et est presque deux fois $\widetilde{\mathscr{A}}(x)$ à l'aire sous $\mathcal{H}^+$ près. Donc

$$\widetilde{\mathscr{A}}(x) = \frac{1}{2}xf(x) - \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - F(x) = g(x)$$

Finalement : $\boxed{\mathscr{A}(x) = 4g(x)}$

b) La fonction g est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables ($\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$), et

$$g'(x) = \frac{x}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{f(x)}{2} - f(x) = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2}$$

Un grand principe, c'est que moins on a de fractions, mieux on se porte :

$$2\sqrt{x^2 - 1}g'(x) = x^2 - (x^2 - 1) = 1 > 0$$

Donc $g' > 0$ et g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$.
Comme $\mathscr{A} = 4g$, $\boxed{\mathscr{A} \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [1; +\infty[.}$

c) Soit $x > 1$. Comme $x^2 - 1 \leqslant x^2$, $g'(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2 - 1}}{\geqslant} \dfrac{1}{2\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{2x}$ (car $x > 0$). Par conséquent,

$$\boxed{\forall x > 1 \quad g'(x) \geqslant \frac{1}{2x}}$$

d) En intégrant l'inégalité précédente entre 2 et x, il vient

$$g(x) - g(2) \geqslant \frac{1}{2}\Big(\ln x - \ln 2\Big)$$

Par minoration, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

D'après la question b), $\mathscr{A} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante.
De plus $\mathscr{A}(1) = 0$, et comme $\mathscr{A} = 4g$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathscr{A}(x) = +\infty$.
Donc $\mathscr{A}$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\mathscr{A}([1, +\infty[) = [0, +\infty[$. Ce qui s'écrit aussi :

$$\boxed{\text{Quel que soit le réel } a \text{ positif, il existe un unique réel } x_a \geqslant 1 \text{ tel que : } \mathscr{A}(x_a) = 2a.}$$

6) **a)** $\overrightarrow{I}.\overrightarrow{J} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ et $\|\overrightarrow{I}\| = \|\overrightarrow{J}\| = 1$. Donc $\boxed{(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}) \text{ est un repère orthonormal du plan.}}$

b) $X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(X\overrightarrow{\imath} - X\overrightarrow{\jmath} + Y\overrightarrow{\imath} + Y\overrightarrow{J}\Big) = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\imath} + \frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\jmath} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}$

Par unicité de la décomposition dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, il vient

$$\boxed{x = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{-X+Y}{\sqrt{2}}}$$

c) En remplaçant x et y par leurs expressions en fonction de X et Y dans l'équation de $\mathcal{H}$, il vient

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}\left(X^2 + 2XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2\right) = 2XY = 1$$

Donc, $\boxed{\text{Dans le repère } (O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}),\ \mathcal{H} \text{ est la courbe de } h : X \mapsto \frac{1}{2X}, \text{ définie sur } \mathbb{R}^*.}$

7) **a)** En résolvant le système trouvé en 6)b) pour $x = 1$ et $y = 0$, On trouve $\boxed{X = Y = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

b)

c) $\mathscr{A}(\mathrm{ch}\,(a)) = 4g(\mathrm{ch}\,(a)) = 2\,\mathrm{ch}\,(a)\sqrt{\mathrm{ch}^2(a) - 1} - 4\displaystyle\int_1^{\mathrm{ch}\,(a)} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

En effectuant le changement de variables $x = \mathrm{ch}\,(t)$ dans l'intégrale, il vient

$$\int_1^{\mathrm{ch}\,(a)} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \left(\sqrt{\mathrm{ch}^2(t) - 1}\right)\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $\sqrt{\mathrm{ch}^2(t) - 1}\,\mathrm{sh}\,(t) = \mathrm{sh}^2(t)$ car $t \in [0, a] \subset \mathbb{R}_+$, puis $\mathrm{sh}^2(t) = \dfrac{\mathrm{ch}\,(2t) - 1}{2}$ donc

$$\int_1^{\mathrm{ch}\,(a)} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\mathrm{ch}\,(2t) - 1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{sh}\,(2a)}{4} - \frac{a}{2}$$

En remplaçant dans la formule de $\mathscr{A}(\mathrm{ch}\,(a))$ (où $\mathrm{sh}\,(a) \geqslant 0$),

$$\mathscr{A}(\mathrm{ch}\,(a)) = \mathrm{sh}\,(2a) - \mathrm{sh}\,(2a) + 2a = \boxed{2a}$$

d) Donc $\mathscr{A} = 2a$ pour le point M de coordonnées $(\mathrm{ch}\,(a), f(\mathrm{ch}\,(a))) = (\mathrm{ch}\,(a), \mathrm{sh}\,(a))$. Comme la fonction $\mathscr{A}$ est strictement croissante (d'après 5)b)), le point $M \in \mathcal{H}^+$ tel que $\mathscr{A} = 2a$ est unique.
Donc $\boxed{\text{les coordonnées du point } M \text{ de } \mathcal{H}^+ \text{ tel que l'aire } \mathscr{A} \text{ soit égale à } 2a \text{ sont } (\mathrm{ch}\,(a), \mathrm{sh}\,(a)).}$

Exercice 2 (CAPES 2010 – corrigé UPS)

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[p, p+1]$ donc $\forall t \in [p, p+1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$.

En intégrant cette inégalité entre p et $p+1$, on obtient : $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p}$

(C'est un classique de la comparaison série/intégrale. Raisonnement à maîtriser parfaitement.)

Puis $-\dfrac{1}{p} \leqslant -\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant -\frac{1}{p+1}$ et finalement

$$\boxed{0 \leqslant a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}}$$

2) • En additionnant les inégalités précédents pour p variant de 1 à n, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{p=1}^{n} a_p \leqslant \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$$

Donc la suite (S_n) est majorée.

• $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$ donc la suite (S_n) est croissante ; étant majorée, elle converge, vers une limite notée γ.

• De l'encadrement $0 \leqslant S_n \leqslant 1$ trouvé ci-dessus, on déduit par passage à la limite $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

3) $a_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u+p}$ en faisant le changement de variable $t = u + p$.

D'où $a_p = \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_0^1 \left(1 - \frac{p}{u+p} \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} \mathrm{d}u$.

Pour $u \in [0, 1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{u+p} \leqslant \dfrac{1}{p}$ donc, d'après le calcul ci-dessus :

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \int_0^1 u \,\mathrm{d}u \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdot \int_0^1 u \,\mathrm{d}u$$

d'où, pour $p \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$$

4) Soient m et n des entiers tels que $m > n \geqslant 1$. Alors $S_m - S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{m} a_p - \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=n+1}^{m} a_p$ donc d'après l'encadrement précédent :

$$\frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{m} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leqslant S_m - S_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{m} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$$

d'où après télescopage :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) \leqslant S_m - S_n \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)$$

et, en faisant tendre m vers $+\infty$:

$$\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}}$$

5) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $H_n = S_n + \ln(n+1)$ donc

$$H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} = S_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} S_n - \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

en utilisant le développement limité $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
Or, d'après l'inégalité précédente :

$$0 \leqslant S_n - \gamma + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)}$$

ce qui montre que $S_n - \gamma + \dfrac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, d'où finalement :

$$\boxed{H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\ .}$$

6) Il suffit de reprendre l'inégalité trouvée à la question 4.

7) Pour $n = 7$, l'inégalité précédente donne $0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \dfrac{1}{112} < 10^{-2}$, donc T_7 convient.

On trouve $T_7 = \dfrac{1487}{560} - 3 * \ln(2) \approx 0.575915601$ alors que $\gamma \approx 0.57721566490153286061$.