Devoir de Mathématiques numéro 1

Exercice 1

Le but de ce problème est l'étude de quelques spécificités des fonctions numériques ch et sh de la variable réelle x définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 (Majorations, minorations, encadrements)

1) Calculer $\operatorname{ch}(0)$ et $\operatorname{sh}(0)$.

2) Démontrer que la fonction ch est paire et que la fonction sh est impaire.

3) **a)** Justifier que, pour tout réel x, on a :
- $[\operatorname{ch}(x)]^2 - [\operatorname{sh}(x)]^2 = 1$;
- $\operatorname{ch}(x) \geqslant 1$.

b) Vérifier que, pour tout réel x positif, on a : $0 \leqslant \operatorname{sh}(x) < \operatorname{ch}(x)$.

4) **a)** Justifier que les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$; déterminer les fonctions dérivées correspondantes.

b) Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions ch et sh.

c) Tracer les courbes représentatives des fonctions ch et sh dans un même repère orthonormal du plan d'unité graphique 1cm.

5) **a)** Démontrer que, pour tout réel x positif, on a : $x \leqslant \operatorname{sh}(x)$.

b) En déduire les inégalités suivantes pour tout réel x positif :

$$1 + \frac{x^2}{2} \leqslant \operatorname{ch}(x) \qquad \text{et} \qquad x + \frac{x^3}{6} \leqslant \operatorname{sh}(x)$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leqslant \operatorname{ch}(x) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leqslant \operatorname{sh}(x)$$

6) **a)** Démontrer que, pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :
- $\operatorname{sh}(x) \leqslant 2x$;
- $\operatorname{ch}(x) \leqslant 1 + x^2$.

b) En déduire les inégalités suivantes pour tout réel x compris entre 0 et 1 :
- $\operatorname{sh}(x) \leqslant x + \dfrac{x^3}{3}$;
- $\operatorname{ch}(x) \leqslant 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12}$.

c) Justifier que, pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :

$$0 \leqslant \operatorname{ch}(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{12}$$

Qu'en est-il pour $\operatorname{sh}(x)$?

Partie 2 (Vers une approximation de la fonction ch par des fonctions polynômes)

1) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{ch}\,(x) = 1 + \int_0^x (x-t)\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t$$

2) Démontrer que, pour tout réel x, la relation suivante est satisfaite pour tout entier n positif :

$$\mathrm{ch}\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t$$

Un nombre réel strictement positif a étant donné, on cherche, dans la suite de cette partie, à montrer que $\mathrm{ch}\,(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$.

3) Démontrer que pour tout entier n strictement positif, on a :

$$\int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\mathrm{ch}\,(a)$$

4) On note $u_n = \dfrac{a^{2n}}{(2n)!}$ où n est un entier strictement positif.

a) Prouver qu'il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$$

b) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a :

$$u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-N}} u_N.$$

c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

5) On considère la suite de réels $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \sum\limits_{k=}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^{2k}}{(2k)!}$

Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{ch}\,(a)$.

Partie 3 (Les fonctions ch et sh et l'hyperbole)

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équation

$$x^2 - y^2 = 1$$

On note $\mathcal{H}^+$ l'ensemble des points de $\mathcal{H}$ admettant des coordonnées x et y positives.

1) Justifier que la courbe $\mathcal{H}^+$ est la courbe représentative dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de la fonction f qui à tout réel x de l'intervalle $[1;+\infty[$ associe $\sqrt{x^2-1}$.

2) Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{H}^+$.

3) Démontrer que la courbe $\mathcal{H}$ peut être obtenue à partir de la courbe $\mathcal{H}^+$ par des symétries que l'on précisera.

4) Tracer la courbe $\mathcal{H}$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Un nombre réel positif a étant donné, on cherche, dans la suite de cette partie, à montrer que les coordonnées du point M de $\mathcal{H}^+$ tel que l'aire $\mathscr{A}$ définie ci-dessous soit égale à $2a$ sont $(\mathrm{ch}\,(a), \mathrm{sh}\,(a))$.

5) On note :

- F la primitive de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et nulle en 1 ;
- $\mathscr{A}$ la fonction qui à tout réel x supérieur ou égal à 1 associe l'aire de la partie du plan comprise entre les segments $[M(x,y), M_2(-x,-y)]$ et $[M_3(-x,y), M_4(-x,y)]$ d'une part, et la courbe $\mathcal{H}$ d'autre part, où M est un point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{H}^+$;

- g la fonction numérique de variable réelle x définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - F(x).$$

a) Justifier la relation suivante, pour tout réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\mathscr{A}(x) = 4g(x).$$

b) Démontrer que la fonction $\mathscr{A}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

c) Justifier l'inégalité suivante, pour tout réel x strictement supérieur à 1 : $g'(x) \geqslant \dfrac{1}{2x}$.

d) Déduire de ce qui précède :
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;
- Quel que soit le réel a positif, il existe un unique réel $x_a \geqslant 1$ tel que : $\mathscr{A}(x_a) = 2a$.

6) Soient $\overrightarrow{I} = \dfrac{\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}}{\sqrt{2}}$ et $\overrightarrow{J} = \dfrac{\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}}{\sqrt{2}}$.
Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on note (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

a) Prouver que $(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est un repère orthonormal du plan.

b) Exprimer x et y en fonction de X et Y.

c) En déduire que, dans le repère $(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, $\mathcal{H}$ est la courbe représentative de la fonction $h : X \mapsto \dfrac{1}{2X}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

7) On note A le point de coordonnées $(1, 0)$ dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

a) Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$?

b) Tracer la courbe $\mathcal{H}$, le point A, la droite $(O; \overrightarrow{\imath})$ et représenter la partie d'aire $\mathscr{A}$ décrite en 5) dans le repère $(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

c) Calculer l'aire $\mathscr{A}(\mathrm{ch}\,(a))$ en fonction de a.

d) Conclure.

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $a_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
On cherche à étudier la limite γ, appelée constante d'Euler, de la suite :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1)$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $0 \leqslant a_p \leqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

2) En déduire que la suite (S_n) est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

3) Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a $a_p = \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+p}\,\mathrm{d}t$, puis montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

4) En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geqslant 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :
$$\frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}$$

5) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite (H_n) :
$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que
$$0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}$$

7) Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner un encadrement de γ à 10^{-2} près.