Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (Oral petites mines 2012)

1) Soit $n \geqslant 2$ fixé. Théorème de la bijection : f_n est strictement décroissante et continue sur $[0, 1]$, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = 2 - n \leqslant 0$.

2) (Non rédigé) Soit $n \geqslant 2$. Par construction, $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ donc $x_n^{n+1} \leqslant x_n^n$ et $-x_n \leqslant 0$. Ainsi

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - nx_n - x_n + 1 \leqslant x_n^n - nx_n + 1 = f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

Or f_{n+1} est strictement décroissante, donc $x_n \geqslant x_{n+1}$: $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est décroissante.}}$

3) Par construction $x_n \in [0, 1]$, donc minorée par 0. Par conséquent (x_n) est décroissante (d'après 2) minorée donc $\boxed{\text{convergente}}$.

De plus $f_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 = 0$ donc, comme $x_n \in [0, 1]$, $0 \leqslant x_n = \dfrac{1}{n}(1 + x_n^n) \leqslant \dfrac{2}{n} \to 0$. Ainsi, par encadrement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 0}$. *On pouvait directement calculer sa limite, en s'épargnant le premier paragraphe.*

4) D'après 3, $x_n \to 0$ donc $x_n^n \to 0$, ce qui s'écrit aussi $x_n^n = o(1)$. Par conséquent

$$f_n(x_n) = 0 = x_n^n - nx_n + 1 = -nx_n + 1 + o(1)$$

D'où $nx_n = 1 + o(1)$, ce qui est équivalent à $nx_n \sim 1$. En conclusion, $\boxed{x_n \sim \dfrac{1}{n}}$

5) Réutilisons le résultat précédent, i.e. $x_n = \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})$. Nous savons que $x_n^{n-1} \to 0$, c'est-à-dire $x_n^{n-1} = o(1)$, ce qui donne, en multipliant par x_n, $x_n^n = o(x_n) = o(\dfrac{1}{n})$. En remplaçant dans $f_n(x_n) = 0$ il vient

$$0 = -nx_n + 1 + o(\frac{1}{n})$$

D'où $\boxed{x_n = \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n^2})}$

Exercice 2 (ISFA, Épreuve 1, ex 2)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{2(1 + \sqrt{1 + x})}$.

1) <u>Minoration</u> : $v_0 > 0$ et $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc, par récurrence, $\boxed{v_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

<u>Variations</u> : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > 0 \Longrightarrow 1 + \sqrt{1 + x} > 2 \Longrightarrow \dfrac{1}{2(1 + \sqrt{1 + x})} < \dfrac{1}{4}$. Ainsi

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2(1 + \sqrt{1 + v_n})} < \frac{1}{4} \leqslant 1$$

et $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$

<u>Limite</u> : La suite (v_n) est décroissante minorée, donc elle converge vers une limite ℓ.

De plus, $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est continue. Par conséquent ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. Résolvons l'équation :

$$\ell = \frac{\ell}{2(1+\sqrt{1+\ell})} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2(1+\sqrt{1+\ell}) & = & 1 \\ \text{ou} \quad \ell & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{1+\ell} & = & -1/2 \\ \text{ou} \quad \ell & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \ell = 0$$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$

2) Le calcul est laissé en exercice au lecteur.

3) Il faut vérifier que w_n est bien définie, car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(t+1)}}$ n'est pas définie en $t = 0$.

Or $\dfrac{1}{\sqrt{t(t+1)}} \sim_0 \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qui a pour primitive $\dfrac{1}{2}\sqrt{t}$. Elle est donc intégrable au voisinage de $t = 0$ (nous (re)verrons cela lors du chapitre intégration).

Calculons w_n à l'aide du changement de variable $x = f(t)$. Bien changer les bornes.

$$w_n = \int_0^{v_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}} = \int_0^{v_n} \frac{2f'(t)}{\sqrt{f(t)(f(t)+1)}}\,\mathrm{d}t = \int_{f(0)}^{f(v_n)} \frac{2}{\sqrt{t(t+1)}}\,\mathrm{d}t = 2w_{n+1}$$

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $1/2$: $w_n = (1/2)^n w_0$. Or, avec l'indication,

$$w_0 = \int_0^{v_0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}} = 2[\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t+1})]_0^{v_0} = 2\ln(\sqrt{v_0}+\sqrt{v_0+1})$$

Ainsi $\boxed{w_n = (1/2)^{n-1}\ln(\sqrt{v_0}+\sqrt{v_0+1}).}$

4) On calcule w_n en fonction de v_n : $w_n = 2\ln(\sqrt{v_n}+\sqrt{v_n+1})$.
Partons à la recherche de l'équivalent de (v_n), c'est-à-dire [une formule en n] $= v_n + o(v_n)$.
D'après la question **1)**, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, donc peut effectuer les DL suivants

$$w_n = 2\ln(\sqrt{v_n}+\sqrt{v_n+1}) = 2\ln(\sqrt{v_n}+1+v_n/2+o(v_n)) = 2\ln(1+[\sqrt{v_n}+o(\sqrt{v_n})]) = 2\sqrt{v_n}+o(\sqrt{v_n})$$

Donc $w_n \sim 2\sqrt{v_n}$, et $v_n \sim \dfrac{1}{4}w_n^2$. Ainsi, d'après **3)**,

$$v_n \sim (1/2)^{2n}\left(\ln(\sqrt{v_0}+\sqrt{v_0+1})\right)^2$$

Exercice 3 (Inspiré de Banque PT 2007, épreuve A, partie A)

Soit (T_k) la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

Dans tout le problème et sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

1)
- $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$
- $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$
- $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

2) Récurrence double : montrons que

$$\mathcal{H}_n : \deg T_n = n \text{ et son coefficient dominant est } a_n^{[n]} = 2^{n-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est vraie puisque $T_1 = X$ de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$.
- $\underline{\mathcal{H}_2}$ est vraie puisque $T_2 = 2X^2 - 1$ de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^1$.

- $\underline{\mathcal{H}_{n-1}\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ **et** $\mathcal{H}_{n-1}$ vraies. Alors

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

  Or $\deg(XT_n) = n+1$ et $\deg(T_{n-1}) = n-1$ d'après $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$.
  Ainsi $\deg(T_{n+1}) = n+1$, et le coefficient dominant vient de $2XT_n$ uniquement. Il vaut le double de celui de T_n, donc $a_{n+1}^{[n+1]} = 2a_n^{[n]} = 2^n$. Par conséquent, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \deg T_n = n \text{ et son coefficient dominant est } a_n^{[n]} = 2^{n-1}.}$

On a besoin des rangs n et $n-1$, donc il faut initialiser avec $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$. On peut aussi mettre les rangs n et $n-1$ dans $\mathcal{H}_n$, en commençant donc à $n = 2$.

3) Le produit de deux polynômes impairs est pair, et le produit d'un polynôme pair et d'un polynôme impair est impair.
Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad T_{2n} \text{ est pair et } T_{2n+1} \text{ est impair}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie car $T_0 = 1$ est paire et $T_1 = X$ est impair.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie.
  Le polynôme $2XT_{2n+1}$ est pair comme produit de deux polynômes impairs, et T_{2n} est pair. Donc T_{2n+2} est pair comme somme de polynômes pairs.
  Le polynôme $2XT_{2n+2}$ est impair comme produit d'un polynôme impair et d'un polynôme pair, et T_{2n+1} est impair. Donc T_{2n+3} est impair comme somme de polynômes impairs.
  Ainsi $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad T_n \text{ a la parité de } n.}$

4) ⋆ $\underline{T_n(1)}$: La suite $(T_n(1))$ vérifie la relation de récurrence $T_{n+1}(1) = 2T_n(1) - T_{n-1}(1)$ avec pour premier termes $T_0(1) = T_1(1) = 1$. On peut donc résoudre à l'aide des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
Sinon, la récurrence est rapide :

$$\mathcal{H}(n) : \qquad \forall k \leqslant n \quad T_k(0) = 1$$

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Alors $T_{n+1}(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$, donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad T_n(1) = 1}$

⋆ $\underline{T_n(-1)}$: Par parité, $T_{2n}(-1) = T_{2n}(1) = 1$ et $T_{2n+1}(-1) = -T_{2n}(1) = -1$. Donc $\boxed{T_n(-1) = (-1)^n.}$

⋆ $\underline{T_n(0)}$: Par parité, $\boxed{T_{2n+1}(0) = 0.}$ Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad T_{2n}(0) = (-1)^k$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Alors

$$T_{2n+2}(0) = 2 \times 0 \times T_{2n+1}(0) - T_{2n}(0) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

  donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad T_{2n}(0) = (-1)^n}$

5) On note $(\mathscr{P})$ la propriété suivante pour une suite (P_n) de polynômes

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \qquad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

⋆ Unicité : Soit (P_n) et (Q_n) deux suites de polynômes vérifiant $(\mathscr{P})$. Soit $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = Q_n(\cos\theta) \Longrightarrow \forall x \in [-1,1] \quad P_n(x) - Q - n(x) = 0$$

Ainsi $P_n - Q_n$ a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul : $P_n - Q_n = 0$. D'où l'unicité.

⋆ (T_n) vérifie la propriété. Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \qquad \forall k \leqslant n \; \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\mathcal{H}_0$ est vraie car $\cos(0) = 1$.
- $\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta)$$
- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

En conclusion, $\boxed{T_n \text{ est le seul polynôme qui vérifie } (\mathscr{P})}$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

6) Dans cette question uniquement, on suppose $n \neq 0$.

a) Il suffit de résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$:

$$T_n(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2}[\pi] \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right]$$

Donc pour $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.}$

b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, d'après la question précédente, $T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = 0$, c'est-à-dire $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ est racine de T_n.

De plus, $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in]0,\pi]$ pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, et le cosinus est bijectif de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
Ainsi, les réels $(x_0,\dots,x_{n-1})$ sont tous distincts et dans $[-1,1]$.
Or le polynôme T_n est de degré n, il a donc au plus n racines. Ainsi

$$T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

7) Si $n = 0$, $T_0' = 1$; et si $n = 1$, $T_1' = 1$. Supposons désormais $n \geqslant 2$.
La relation de la question 5) est vraie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et les fonctions sont dérivables : dérivons-la.

$$-\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$$

Or $\sin(n\theta) = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. De même qu'en 6)b), les $x_k' = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ sont $n-1$ réels tous distincts de $[-1,1]$ lorsque $k \in \{1,\dots,n-1\}$.
De plus, $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \neq 0$ si $k \in \{1,\dots,n-1\}$, donc

$$-\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)T_n'\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = -n\sin(k\pi) = 0 \Longrightarrow T_n'(x_k') = 0$$

Ainsi, $(x_1',\dots,x_{n-1}')$ sont des racines de T_n'. Or $\deg T_n' = (\deg T_n) - 1 = n-1$, donc ce sont les seules.

Exercice 4 (CAPES 2009 et autres – suite du DS1)

C. Polynômes de Bernoulli

1) Définitions.

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ fixé.

Unicité [1] :

Soit Q_1 et $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ qui conviennent. Alors $Q_1' = Q_2' = P$ donc $(Q_1 - Q_2)' = 0$ et $Q_1 - Q_2 = K$ est un polynôme constant.

Or $\displaystyle\int_0^1 (Q_1(x) - Q_2(x))\,\mathrm{d}x = K = \int_0^1 Q_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 Q_2(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Donc $Q_1 = Q_2$ et on a montré l'unicité.

Existence : Notons $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\widetilde{Q}(X) = \sum k = 0^n \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$. Alors le polynôme $Q(X) = \widetilde{Q}(X) - \displaystyle\int_0^1 \widetilde{Q}(x)\,\mathrm{d}x$ convient : $Q' = \widetilde{Q}' = P$ et

$$\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\widetilde{Q}(x) - \int_0^1 \widetilde{Q}(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \widetilde{Q}(x)\,\mathrm{d}x - 1 \times \int_0^1 \widetilde{Q}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Il existe un unique } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } Q' = P \text{ et } \displaystyle\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = 0.}$

b) Montrons par récurrence qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(B_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$B_0(X) = 1 \qquad \forall n \geqslant 1,\quad B_n' = nB_{n-1} \qquad \forall n \geqslant 1,\quad \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Pour tout $n \geqslant 0$, posons $\mathcal{H}(n)$: B_n existe et est unique.

- $\mathcal{H}_0$: $B_0 = 1$, donc est unique.
- $\mathcal{H}_{n-1} \Longrightarrow \mathcal{H}_n$: Supposons que $\mathcal{H}(n-1)$ est vraie, c'est-à-dire que B_{n-1} est construit. Alors, d'après la propriété montrée en 1)a), il existe un unique polynôme B_n tel que $B_n' = nB_{n-1}$ et que $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$. D'où $\mathcal{H}(n)$ vraie.
- Conclusion : $\forall n \geqslant 0$ $\boxed{B_n \text{ existe et est unique.}}$

c) $B_0 = 1 \quad B_1 = X - \dfrac{1}{2} \quad B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6} \quad B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X \quad B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \dfrac{1}{30}$

$b_0 = 1 \quad b_1 = -\dfrac{1}{2} \quad b_2 = +\dfrac{1}{6} \quad b_3 = 0 \quad b_4 = -\dfrac{1}{30}$

2) **a)** B_n est de degré n.

b) Soit $n \geqslant 2$. On a $B_n' = nB_{n-1}$ et $n - 1 \geqslant 1$ donc

$$0 = \int_0^1 B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{B_n'}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[B_n(x)\right]_0^1 = \frac{1}{n}(B_n(1) - B_n(0))$$

Ainsi $\boxed{B_n(0) = B_n(1).}$

c) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\mathcal{H}_0$ est vraie par hypothèse.

1. Dans ce genre de situation — sauf gros théorème qui donne existence+unicité — il vaut mieux commencer par l'unicité, pour comprendre la propriété à vérifier

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Par définition, B_{n+1} est une primitive de $(n+1)B_n$ de terme constant b_{n+1} :

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &= b_{n+1} + \int_0^x (n+1)B_n(t)\,\mathrm{d}t = b_{n+1} + \int_0^x (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_{n-k}t^k\right)\,\mathrm{d}t \\ &= b_{n+1} + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} b_{n-k}t^k\right)\,\mathrm{d}t = b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} b_{n-k}x^{k+1} \\ &= b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} b_{(n+1)-(k+1)}x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} b_{n+1-k}x^k \end{aligned}$$

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\forall n \geqslant 0 \qquad B_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_{n-k}X^k$

d) D'après la question 2)b), pour tout $n \geqslant 1$, $B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1)$, ce qui s'écrit, d'après 2)c),

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} b_{n+1-k} = b_{n+1} + (n+1)b_n + \sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n+1}{k'} b_{k'}$$

En conclusion, $\boxed{b_n = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} b_k.}$

$$b_5 = -\frac{1}{6}\left(b_0 + 6b_1 + 15b_2 + 20b_3 + 15b_4\right) = -\frac{1}{6}(1 - 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}) = 0$$

$$b_6 = -\frac{1}{7}b_0 - b_1 - 3b_2 - 5b_3 - 5b_4 - 3b_5 = -\frac{1}{42}$$

(Pensez au triangle de Pascal pour calculer les coefficients binomiaux)

e) Montrons que la suite C_n vérifie les conditions du 1)b).

- $C_0(X) = B_0(1-X) = 1$
- Pour tout $n \geqslant 1$, $C_n'(X) = (-1)^n \times (-1)B_n'(1-X) = (-1)^{n-1}nB_{n-1}(1-X) = nC_{n-1}'(X)$.
- Effectuons le changement de variable $t = 1 - x$:

$$\int_0^1 C_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_1^0 B_n(t)(-1)\,\mathrm{d}t = 0$$

Donc, par unicité de la suite (B_n) (question 1)b)), $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0 \text{ on a } C_n(X) = B_n(X).}$

f) $\forall n \geqslant 0$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$; et d'après 2)b), $\forall n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$, $b_{2n+1} = B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(1)$, et finalement $\boxed{b_{2n+1} = 0.}$
En évaluant en $X = 1/2$ on trouve que, pour tout $n \geqslant 0$, $B_{2n+1}(1/2) = -B_{2n+1}(1/2)$ donc $\boxed{B_{2n+1}(1/2) = 0.}$

3) **a)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul de signe constant sur $[0,1]$, tel que $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
La fonction $x \mapsto P(x)$ est continue sur $[0,1]$, de signe constant sur cet intervalle, et d'intégrale nulle. Donc P est nul sur $[0,1]$. Or le seul polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul : $P = 0$.
Ce qui contredit l'hypothèse $P \neq 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } P \text{ est non nul et de signe constant sur } [0,1], \text{ alors } \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.}$

b) Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété $\mathcal{H}(n)$:

$\star$ B_{2n} vérifie

- $(-1)^n B_{2n}(0) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1/2) > 0$
- la fonction $(-1)^n B_{2n}$ est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

⋆ B_{2n+1} vérifie

- $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(1/2) = 0$
- il existe deux réels $\alpha_{2n+1} \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\beta_{2n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[$ tels que la fonction $(-1)^n B_{2n+1}$ soit strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$, puis strictement croissante sur $[\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}]$, puis strictement décroissante sur $[\beta_{2n+1}, 1]$.

Ce qui peut aussi s'écrire

x	0		α_n		$\frac{1}{2}$		β_n		1
$(-1)^n B_{2n}$	$(-1)^n B_{2n}(0) < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(-1)^n B_{2n}(\frac{1}{2}) > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$(-1)^n B_{2n}(1) < 0$
signe de $(-1)^n B_{2n}(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$(-1)^n B_{2n+1}$	0	$\searrow$	$(-1)^n B_{2n+1}(\alpha_n)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(-1)^n B_{2n+1}(\beta_n)$	$\searrow$	0
signe de $(-1)^n B_{2n+1}(x)$			$-$		0		$+$		

Justification des tableaux de signes :

- La dérivée de $(-1)^n B_{2n+1}$ (dont on connaît les variations) est $(2n+1)(-1)^n B_{2n}$ par définition des polynômes de Bernoulli, d'où le signe de $(-1)^n B_{2n}(x)$ et les valeurs en α_n et β_n.
- Le signe de $(-1)^n B_{2n+1}(x)$ est une conséquence du tableau de variations de $(-1)^n B_{2n+1}$, sachant que $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(1/2) = 0$

$\boxed{\underline{\mathcal{H}_1}}$: Étudions $(-1)^1 B_2(X) = -X^2 + X - \frac{1}{6}$ et $(-1)^1 B_3(X) = -X^3 + \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$.

⋆ $-B_2'(x) = -2x+1$ s'annule en $1/2$, de tableau de signe immédiat, d'où le tableau de variation de $-B_2$. De plus $-B_2(0) = -B_2(1) = -\frac{1}{6} < 0$ et $-B_2(1/2) = \frac{1}{12} > 0$.

La fonction $-B_2$ est continue, strictement monotone sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1]$, ayant des valeurs de signes opposés aux extrémités de ces intervalles, s'annule donc exactement une fois sur chacun de ces intervalles, en des valeurs que l'on notera respectivement α_1 et β_1 (théorème de la bijection).

De plus, sur les intervalles $]0, \alpha_1[$ et $]\beta_1, 1[$, $-B_2 < 0$; et sur l'intervalle $]\alpha_1, \beta_1[$, $-B_2 > 0$.

⋆ $-B_3'(x) = 3(-B_2(x))$ donc on déduit de ci-dessus le tableau de signe de $-B_3'(x)$, puis le tableau de variation de $-B_3$ (voir ci-dessous).

D'après 2)f) et 2)b), $-B_3(1/2) = 0$ et $-B_3(0) = -B_3(1) = -b_3 = 0$

Donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie. Tableau récapitulatif :

x	0		α_1		$\frac{1}{2}$		β_1		1
$-B_2$	$-B_2(0) < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-B_2(\frac{1}{2}) > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-B_2(1) < 0$
signe de $-B_2(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$-B_3$	0	$\searrow$	$-B_3(\alpha_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-B_3(\beta_1)$	$\searrow$	0
signe de $-B_3(x)$			$-$		0		$+$		

$\boxed{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. On a donc les tableaux de variations et de signes de la page 7.

$\star$ Étude de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$.

- Variations : $(-1)^{n+1}B'_{2n+2} = -(2n+2)(-1)^n B_{2n+1}$ donc le tableau de signe de la dérivée de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est l'opposé de la dernière ligne du tableau $\mathcal{H}(n)$. On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$\frac{1}{2}$		1
signe de $(-1)^{n+1}B'_{2n+2}(x)$		$+$	0	$-$	
$(-1)^{n+1}B_{2n+2}$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0)$	$\nearrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2})$	$\searrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(1)$

- Signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$ en 0 ,$\frac{1}{2}$ et 1 : D'après 2)b) $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+2}(1)$. Si ce nombre est positif ou nul, alors $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est de signe constant sur $[0,1]$ (tableau de variations). Or par définition des polynômes de Bernoulli, $\int_0^1 B_{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi, d'après 3)a), $B_{2n+2} = 0$. Or la fonction $x \mapsto (-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$ est *strictement* croissante sur $[0,1/2]$, donc c'est absurde. Ainsi $\boxed{(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+2}(1) < 0.}$
  De même, si $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2}) \leqslant 0$, $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est de signe constant et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2}) > 0.}$
- Tableau de signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$: De même que lors de l'étude du signe de $-B_2$, on applique le théorème de la bijection sur les intervalles $[0,1/2]$ et $[1/2,1]$, ce qui nous donne l'existence de α_{n+1} et β_{n+1} et le tableau de signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$. (voir le tableau récapitulatif en fin de paragraphe).

$\star$ Étude de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}$.

- <u>Variations</u> : Le tableau de signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$ est le même que celui de la dérivée $(-1)^{n+1}B'_{2n+3} = (2n+3)(-1)^{n+1}B_{2n+2}$, d'où le tableau de variations (voir tableau récapitulatif).
- <u>Valeur de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(x)$ en 0 ,$\frac{1}{2}$ et 1</u> : D'après 2)b) et 2)f), il vient $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(\frac{1}{2}) = 0$ et $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+3}(1) = (-1)^{n+1}b_{2n+3} = 0$.
- <u>Le signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(x)$</u> s'obtient par lecture du tableau de variations.

On a donc montré que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Tableau récapitulatif :

x	0		α_{n+1}		$\frac{1}{2}$		β_{n+1}		1
$(-1)^{n+1}B_{2n+2}$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0)<0$	↗	0	↗	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2})>0$	↘	0	↘	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(1)<0$
signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$(-1)^{n+1}B_{2n+3}$	0	↘	$(-1)^{n+1}B_{2n+3}(\alpha_n)$	↗	0	↗	$(-1)^{n+1}B_{2n+3}(\beta_n)$	↘	0
signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(x)$			$-$		0		$+$		

$\boxed{\text{Conclusion}}$: $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

c) Soit $p \geqslant 1$. D'après la question 3)b), $(-1)^p b_{2p} = (-1)^p B_{2p}(0)$ est négatif, donc du signe de -1. Par conséquent, le signe de b_{2p} est $(-1)^{p+1}$.

4) a) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- <u>$\mathcal{H}_1$</u> : $B_1(X) = X - 1/2$, donc $B_1(X+1) - B_1(X) = 1 = 1 \times X^{1-1}$. Ainsi, $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- <u>$\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$</u> : Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie, c'est-à-dire, en multipliant par $(n+1)$,

$$(n+1)B_n(X+1) - (n+1)B_n(X) = (n+1)nX^{n-1}$$

En intégrant entre 0 et x le premier membre, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^x (n+1)B_n(t+1) - (n+1)B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t &= [B_{n+1}(t+1) - B_{n+1}(t)]_0^x \\ &= B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(1) - B_{n+1}(x) + B_{n+1}(0) \\ &= B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)\end{aligned}$$

puisque $n+1 \geqslant 2$, d'après 2)b), $B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1)$. Et $\int_0^x (n+1)nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = (n+1)x^n$
Ainsi, $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n$, et $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}}$

b) Soit $p \geqslant 1$ et $N \geqslant 0$ deux entiers. D'après la question précédente, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, $k^p = \dfrac{1}{p+1}(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)$. La somme $S_p(N)$ devient donc télescopique :

$$\begin{aligned} S_p(N) &= \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{N}(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)) = \frac{1}{p+1}\left(\sum_{k=1}^{N+1} B_{p+1}(k) - \sum_{k=0}^{N} B_{p+1}(k)\right) \\ &= \frac{1}{p+1}(B_{p+1}(N+1) - B_{p+1}(0)) = \frac{B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}}{p+1} \end{aligned}$$

c) $B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}$, c'est le polynôme B_{p+1} évalué en $N+1$ sans son terme constant :

$$\begin{aligned} S_1(N) &= \frac{B_2(N+1) - b_2}{2} = \frac{(N+1)^2 - (N+1)}{2} = \frac{(N+1)(N+1-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \\ S_2(N) &= \frac{B_3(N+1) - b_3}{3} = \frac{(2N^2+N)(N+1)}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \\ S_3(N) &= \frac{B_4(N+1) - b_4}{4} = \frac{(N+1)^4 - 2(N+1)^3 + (N+1)^2}{4} = \frac{N^2(N+1)^2}{4} \end{aligned}$$