Devoir de Mathématiques numéro 1

Exercice 1 (Oral petites mines 2012)

Pour tout $n \geqslant 2$, on note f_n la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1) Soit $n \geqslant 2$ fixé. Montrer que $f_n(x) = 0$ a une unique solution, que l'on notera x_n.

2) Étude des variations de $(x_n)_{n \geqslant 2}$ (Indication : *comparer* $f_{n+1}(x_n)$, $f_n(x_n)$ *et* $f_{n+1}(x_{n+1})$).

3) Montrer qu'elle converge, calculer sa limite.

4) Trouver un équivalent de (x_n).

5) Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de (x_n).

Exercice 2

Soit (v_n) la suite définie par le premier terme $v_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{2(1+\sqrt{1+v_n})}$$

1) Étudier la convergence de la suite (v_n) et donner son éventuelle limite.

2) Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction définie pour x positif ou nul par : $f(x) = \dfrac{x}{2(1+\sqrt{1+x})}$.

Montrer pour tout $x > 0$ la relation $\dfrac{2f'(x)}{\sqrt{f(x)(f(x)+1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$

3) On introduit la suite $w_n = \displaystyle\int_0^{v_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}$. Montrer que $2w_{n+1} = w_n$. Donner l'expression de w_n en fonction de n et v_0.

4) En déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Indication : *On pourra remarquer que la fonction* $\ln(\sqrt{t} + \sqrt{t+1})$ *a pour dérivée la fonction* $\dfrac{1}{2\sqrt{t(t+1)}}$.

Exercice 3

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.
Enfin, P' et P'' désigneront respectivement les polynômes dérivés de P et P'.
Soit (T_k) la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

Dans tout le problème et sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

1) Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.

2) Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant ?

3) Étudier la parité de T_n.

4) Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.

5) Montrer que T_n est le seul polynôme qui vérifie :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

6) Dans cette question uniquement, on suppose $n \neq 0$.
  a) Pour quelles valeurs de θ a-t-on : $T_n(\cos\theta) = 0$?
  b) Montrer alors que T_n possède n racines réelles distinctes dans $[-1, 1]$. Conclure.

7) Déterminer les racines de T_n'.

Exercice 4

C. Polynômes de Bernoulli

1) Définitions.
  a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
  b) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(B_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$B_0(X) = 1 \qquad \forall n \geqslant 1,\quad B_n' = nB_{n-1} \qquad \forall n \geqslant 1,\quad \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

  On appelle $(B_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Bernoulli. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $b_n = B_n(0)$. La suite de réels (b_n) est appelée suite des nombres de Bernoulli.
  c) Expliciter $B_n(X)$ et b_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

2) Premières propriétés.
  a) Quel est le degré de $B_n(X)$ pour $n \geqslant 0$?
  b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.
  c) Prouver par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k$$

  d) En déduire, pour $n \geqslant 1$, une expression de b_n en fonction de $b_0, \dots, b_{n-1}$. Calculer b_5 et b_6.
  e) Pour tout $n \geqslant 0$ on pose $C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$. Montrer, en utilisant la définition des polynômes de Bernoulli, que pour tout $n \geqslant 0$ on a $C_n(X) = B_n(X)$.
  f) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $b_{2n+1} = 0$ et que, pour tout $n \geqslant 0$, $B_{2n+1}(1/2) = 0$.

3) Étude des variations de B_n sur $[0, 1]$.
  a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Établir que, si P est non nul et de signe constant sur $[0, 1]$, alors $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$.
  b) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que B_{2n} vérifie
  - $(-1)^n B_{2n}(0) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1/2) > 0$
  - la fonction $(-1)^n B_{2n}$ est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

  et que B_{2n+1} vérifie
  - $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(1/2) = 0$
  - il existe deux réels $\alpha_{2n+1} \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\beta_{2n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[$ tels que la fonction $(-1)^n B_{2n+1}$ soit strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$, puis strictement croissante sur $[\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}]$, puis strictement décroissante sur $[\beta_{2n+1}, 1]$.

  Indication : *Il pourra être judicieux d'aborder en même temps la récurrence sur ces quatre propriétés.*
  c) En déduire que le signe du réel b_{2p} est $(-1)^{p+1}$ pour tout $p \geqslant 1$.

4) Une application arithmétique.
  a) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $B_n(x + 1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.
  b) Soit $p \geqslant 1$ et $N \geqslant 0$ deux entiers. On pose $S_p(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^p$, montrer en utilisant la question précédente que

$$S_p(N) = \frac{B_{p+1}(N + 1) - b_{p+1}}{p + 1}$$

  c) Calculer explicitement en fonction de N les sommes $S_p(N)$ pour $p = 1, 2, 3$.