

Épreuve de Mathématiques 8

Correction

Exercice 1 (Ecricome 2012, ECE — UPS)

1) Il y a $2n$ feuilles dans la boite.
La pioche forme un couple si et seulement si la seconde feuille piochée est « la » bonne, c'est-à-dire la copie associée si on a pioché un original, ou l'original associé si on a pioché une copie. Il reste $2n-1$ feuilles dans la boite à ce moment là.
Ainsi $\mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right) = \dfrac{1}{2n-1}$ et $\mathrm{P}(A_n) = 1 - \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{2n-2}{2n-1}$
Conclusion : $\boxed{a_n = \dfrac{2n-2}{2n-1}}$

2) Étude de T_2. On suppose dans cette question que $n = 2$, c'est-à-dire que la boite contient deux originaux et deux copies.

a) Pour vider la boite, il faut et suffit d'avoir d'abord un premier couple, les feuilles restantes seront alors agrafées à la pioche suivante.
Donc $(T_2 = k)$ signifie que l'on n'a pas eu de couple jusqu'à $k-1$, et que l'on en a eu un à la $k-1^{\text{ème}}$ pioche.
En notant S_i (succès) le fait d'avoir un couple à la $i^{\text{ème}}$ pioche et E_i sinon, on a donc :

$$(T_2 = k) = E_1 \cap \cdots S_{k-1} \text{ et}$$
$$\mathrm{P}(T_2 = k) = \mathrm{P}(E_1)\,\mathrm{P}_{E_1}(E_2)\cdots\mathrm{P}_{E_1\cdots E_{k-2}}(S_{k-1})$$

Tant que l'on n'a pas eu de couple, on est avec une boite contenant les 4 feuillets et la probabilité de ne pas piocher un couple est donc a_2.
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } k \geqslant 2 : \mathrm{P}(T_2 = k) = (1-a_2)(a_2)^{k-2}}$

b) $S_2 = T_2 - 1$
Donc $S_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(S_2 = k) = (T_2 = k+1)$ donc $\mathrm{P}(S_2 = k) = (1-a_2)(a_2)^{k-1}$
Conclusion : $\boxed{S_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-a_2)}$
donc $E(S_2) = \dfrac{1}{1-a_2}$ et $V(S_2) = \dfrac{a_2}{(1-a_2)^2}$
et comme $T_2 = S_2 + 1$ alors $V(T_2) = V(S_2)$ et $E(T_2) = E(S_2) + 1$
Conclusion : $\boxed{E(T_2) = \dfrac{2-a_2}{1-a_2} \text{ et } V(T_2) = \dfrac{a_2}{(1-a_2)^2}}$

3) Étude de T_3. On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boite, contient trois originaux et trois copies.

a) Comme il y a 3 paires à reformer , $(T_3 = 2)$ est impossible et $\mathrm{P}(T_3 = 2) = 0$
$(T_3 = 3)$ signifie que l'on a fait des paires à chaque pioche :
Donc $(T_3 = 3) = S_1 \cap S_2$ (on a alors S_3) et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_3 = 3) &= \mathrm{P}(S_1)\,\mathrm{P}_{S_1}(S_2)\\ &= (1-a_3)(1-a_2)\end{aligned}$$

car quand on a fait le premier couple, il reste 4 feuilles.

b) $\left(A_3, \overline{A_3}\right)$ est un système complet d'événements, donc pour tout $k \geqslant 2$ (impossible sinon) que :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_3 = k+1) &= \mathrm{P}_{A_3}(T_3 = k+1)\,\mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1)\,\mathrm{P}\left(\overline{A_3}\right) \\ &= a_3\,\mathrm{P}(T_3 = k) + (1 - a_3)\,\mathrm{P}(T_2 = k) \end{aligned}$$

avec $\mathrm{P}_{A_3}(T_3 = k+1) = \mathrm{P}(T_3 = k)$ car, quand on n'a pas fait de couple au premier on est encore avec les 6 feuillets dans la boite et il ne reste que k pioches à faire pur finir en $k+1$ picoches.
et $\mathrm{P}_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1) = \mathrm{P}(T_2 = k)$ car un couple ayant été agrafé, il ne reste que 2 coules dans la boites et k pioches à faire pour la vider.

c) Courageusement, par récurrence :
Pour $k = 2$:

$$\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^0 - (a_2)^0\right] = \mathrm{P}(T_3 = 2)$$

Soit $k \geqslant 2$.tel que

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_3 = k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] \text{ alors} \\ \mathrm{P}(T_3 = k+1) &= a_3\,\mathrm{P}(T_3 = k) + (1 - a_3)\,\mathrm{P}(T_2 = k) \\ &= a_3\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] + (1-a_3)(1-a_2)(a_2)^{k-2} \\ &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[a_3(a_3)^{k-2} - a_3(a_2)^{k-2} + (a_2)^{k-2}(a_3 - a_2)\right] \\ &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-1} - (a_2)^{k-1}\right] \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 2, \quad \mathrm{P}(T_3 = k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right].}$

d) On doit trouver 1 !

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{M} \mathrm{P}(T_3 = k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\sum_{k=2}^{M}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] \\ &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\sum_{h=0}^{M}\left[(a_3)^{h} - (a_2)^{h}\right] \\ &\to \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[\frac{1}{1-a_3} - \frac{1}{1-a_2}\right] \text{ car } |a_3| < 1 \\ &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[\frac{a_2 - a_3}{(1-a_3)\,1-a_2}\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(T_3 = k) \text{ et } T_3 \text{ est bien une variable aléatoire}}$

e) Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{M}(k-1)\,\mathrm{P}(T_3=k)\\
&=\sum_{k=2}^{M}(k-1)\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{h=1}^{M-1}h\,(a_3)^{h-1}-h\,(a_2)^{h-1}\\
&\to\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{1}{(1-a_3)^2}-\frac{1}{(1-a_2)^2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(1-a_2)^2-(1-a_3)^2}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(1-a_2-1+a_3)(1-a_2+1-a_3)}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(a_3-a_2)(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}\right]\\
&=\frac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)}=E(T_3-1)
\end{aligned}$$

La série est absolument convergente, donc T_3-1 admet une espérance et calculer $E(T_3-1)=\dfrac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)}$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } T_3 \text{ a une espérance et } E(T_3)=\dfrac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)}+1}$

f) De même (presque ...)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{M}k(k-1)\,\mathrm{P}(T_3=k)\\
&=\sum_{k=2}^{M}k(k-1)\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{M}k(k-1)\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]\\
&\to\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{2}{(1-a_3)^3}-\frac{2}{(1-a_2)^3}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(1-a_2)^3-(1-a_3)^3}{(1-a_3)^3(1-a_2)^3}\right]
\end{aligned}$$

et on doit retravailler d'abord

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$$

pour simplifier

$$\begin{aligned}
E[T_3(T_3-1)]&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(1-a_2-1+a_3)\left[(1-a_2)^2+(1-a_2)(1-a_3)+(1-a_3)^2\right]}{(1-a_3)^3(1-a_2)^3}\right]\\
&=\frac{a_2^2-2a_2+1+1-a_2-a_3+a_2a_3+1-2a_3+a_3^2}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}\\
&=\frac{a_2^2+a_2a_3-3a_2+a_3^2-3a_3+3}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}
\end{aligned}$$

car la série est absolument convergente
$T_3(T_3-1) = T_3^2 - T_3$ donc $T_3^2 = T_3(T_3-1) + T_3$ a une espérance et

$$\begin{aligned} E\left(T_3^2\right) &= E\left[T_3(T_3-1)\right] + E(T_3) \\ &= \frac{a_2^2 + a_2a_3 - 3a_2 + a_3^2 - 3a_3 + 3}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2} + \frac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)} + 1 \end{aligned}$$

donc $T_3 a$ une variance et
$$V(T_3) = E\left(T_3^2\right) - E(T_3)^2$$
et là l'énoncé ne demande pas son expression ... donc on s'arrête

Bilan : le début est déroutant, mais en restant formel (ce à quoi poussait l'énoncé) les calculs ne sont pas monstrueux.

Exercice 2 (EDHEC 2012, ECE — UPS)

Soit $p \in \left]0,1\right[$ et $q = 1-p$
On note P pour pile et F pour face
$\mathrm{P}(P) = p$ et $\mathrm{P}(F) = q$
On lance cette pièce et on s'arrête dans les conditions suivantes :

- Soit si l'on a obtenu « Pile ».
- Soit on a obtenu n fois « Face ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de « Pile » obtenus et enfin Y_n le nombre de « Face » obtenus.

1) Loi de T_n

a) Pour $k=1$, $(T_n = 1)$ signifie que l'on n'a fait qu'un seul lancer, donc $(T_n = 1) = P_1$ puis $P(T_n = 1) = p$.
Et pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, $(T_n = k)$ signifie que l'on a fait k lancer, donc que l'on a eu le premier pile au $k^{ième}$ et donc des face avant.

$$(T_n = k) = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$$

Donc, par indépendance mutuelles des lancers,

$$\mathrm{P}(T_n = k) = \mathrm{P}(F_1)\ldots\mathrm{P}(F_{k-1})\,\mathrm{P}(P_k)$$

Donc $\mathrm{P}(T_n = k) = q^{k-1}p$ formule encore valable pour $k=1$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_n = k) = q^{k-1}p \text{ pour } k \in [[1, n-1]]}$

b) $(T = n)$ signifie que l'on a effectué n lancers, c'est à dire que l'on n'a pas eu de « Pile » jusqu'au précédent. Les lancer se terminant de toute façon au $n^{ième}$ si l'on n'a que de « Face »
Donc
$$(T_n = n) = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}$$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_n = n) = q^{n-1}}$

c) Dans la somme, il faut isoler la valeur $k=n$ qui n'a pas la même formule que les autres :

$$\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = q^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}p = q^{n-1} + p\frac{1-q^{n-1}}{1-q} = q^{n-1} + 1 - q^{n-1} = 1$$

d) T_n étant finie, elle a une espérance et

$$E\left(T_n\right)=\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{P}\left(T_n=k\right)=\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p+nq^{n-1}$$

On reconnaît une série géométrique – tronquée – dérivée :

$$\sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)=\dots$$

Ou bien, vu qu'on nous donne la formule (qui ne contient que du q), on remplace $p=1-q$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}(1-q)=\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1} kq^k=\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)q^k-\sum_{k=1}^{n-1} kq^k=-(n-1)q^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2} q^k$$

D'où

$$E(T_n)=nq^{n-1}-(n-1)q^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2} q^k=\sum_{k=0}^{n-1} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n\geqslant 2 : E\left(T_n\right)=\dfrac{1-q^n}{1-q}}$

2) Loi de X_n.

a) et b) Lors des lancer, on a ou bien un Pile et on s'arrête, ou bien n face. Donc $X_n(\Omega)=\{0,1\}$: X_n suit une loi de Bernoulli. De plus $(X_n=0)=$ « n faces » et $\mathrm{P}\left(X_n=0\right)=q^n$.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} X_n\hookrightarrow\mathcal{B}\left(1-q^n\right)\\ E\left(X_n\right)=1-q^n\end{array}}$

3) Loi de Y_n

a) Pour tout $k\in[[0,n-1]]$, $(Y_n=k)$ signifie que l'on a eu k Face (donc pas n) et donc ensuite un Pile.

$$(Y_n=k)=F_1\cap\cdots F_k\cap P_{k+1} \text{ donc } \mathrm{P}\left(Y_n=k\right)=q^kp$$

b) $(Y_n=n)$ signifie que l'on a eu n Face donc $\mathrm{P}\left(Y_n=n\right)=q^n$

c) Le nombre total de lancer est le nombre total de Pile et de Face obtenus.

Conclusion : $\boxed{T_n=X_n+Y_n}$

donc $Y_n=T_n-X_n$ et, par linéarité de l'espérance,

$$E\left(Y_n\right)=E\left(T_n\right)-E\left(X_n\right)=\frac{1-q^n}{1-q}-(1-q^n)=(1-q^n)\left(\frac{1}{1-q}-1\right)=\frac{q(1-q^n)}{1-q}$$

Exercice 3 (ESSEC 2011, ECE — UPS)

Dans ce problème nous supposerons que le jeu de cartes est constitué d'au moins 2 cartes, soit $N\geq 2$.

1) Pour $i\in[\![2,n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{i}\Delta_k=T_1+\sum_{k=2}^{i}(T_k-T_{k-1})=T_i$ (somme télescopique).

Δ_i représente le temps qu'il faut pour que la carte C_N passe de la position $N-i+1$ à la position $N-i$, c'est-à-dire le temps qu'il faudra, à partir de l'instant T_{i-1}, pour obtenir une insertion entre les places N et $N-i+1$ (compris).

2) $(\Delta_1 > n)$ est l'événement : pendant les n premiers instants les numéros d'insertions sont toujours entre 1 et $N-1$.

Par hypothèse, un numéro d'insertion entre 1 et $N-1$ est choisi avec probabilité $\dfrac{N-1}{N}$ (loi uniforme) et les choix des numéros d'insertions sont supposés indépendants donc

$$\mathbf{P}(\Delta_1 > n) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

donc $\mathbf{P}(\Delta_1 = n) = \mathbf{P}(\Delta_1 > n-1)) - \mathbf{P}(\Delta_1 > n) = \dfrac{1}{N}\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^{n-1}$

Ainsi $\boxed{\Delta_1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1/N.}$

3) **a)** $(\Delta_i > n)$ correspond à l'événement : "pendant n instants successifs (à partir de T_{i-1}) les numéros d'insertions sont compris entre 1 et $N-i$ compris".

Par hypothèse, un numéro d'insertion entre 1 et $N-i$ est choisi avec probabilité $\dfrac{N-i}{N}$ (loi uniforme) et les choix des numéros d'insertions sont supposés indépendants donc

$$\mathbf{P}(\Delta_i > n) = \left(\frac{N-i}{N}\right)^n$$

donc $\mathbf{P}(\Delta_i = n) = \mathbf{P}(\Delta_i > n-1)) - \mathbf{P}(\Delta_i > n) = \dfrac{i}{N}\left(1 - \dfrac{i}{N}\right)^{n-1}$

On en conclut que $\boxed{\Delta_i \text{ suit une loi géométrique de paramètre } i/N.}$

b) Par un résultat de cours sur les lois géométriques

$$E(\Delta_i) = \frac{1}{i/N} = \frac{N}{i} \qquad \text{et} \qquad V(\Delta_i) = \frac{1 - i/N}{(i/N)^2} = \frac{N(N-i)}{i^2}$$

4) **a)** $T_2 = \Delta_1 + \Delta_2$ donc

$$(T_2 = n) = \bigcup_{k=1}^{n-1} (\Delta_1 = k) \cap (\Delta_2 = n-k)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_2 = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\left[(\Delta_1 = k) \cap (\Delta_2 = n-k)\right] && \text{union d'événements incompatibles} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(\Delta_1 = k)\mathbf{P}(\Delta_2 = n-k) && \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

b) Calcul d'une somme géométrique de raison $\rho = \dfrac{1-1/N}{1-2/N} \neq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k &= \frac{1-1/N}{1-2/N} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k \\ &= \frac{1-1/N}{1-2/N} \frac{1 - \left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1-1/N}{1-2/N}} \\ &= \frac{1-1/N}{1-2/N} \frac{1-2/N}{(1-2/N)^{n-1}} \frac{(1-2/N)^{n-1} - (1-1/N)^{n-1}}{-1/N} \\ &= N\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left[\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1} - 1\right] \end{aligned}$$

c) En utilisant les lois de Δ_1 et Δ_2, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_2 = n) &= \frac{1}{N}\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-k-1} \\
&= \frac{2}{N^2}\frac{\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{N}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k \\
&= \frac{2}{N^2}\frac{\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{N}}N\left(1-\frac{1}{N}\right)\left[\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1}-1\right] \\
&= \frac{2}{N}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\right]
\end{aligned}$$

5) Les deux probabilités demandées sont égales (il y a autant de chances que la carte placée à l'instant T_2 le soit en position $N-1$ ou N, l'autre est alors à l'autre place possible). Ainsi, les deux probabilités valent $1/2$.

6) Il y a $3! = 6$ possibilités pour le triplet (a_1, a_2, a_3).
Il y a autant de chances que la carte placée à l'instant T_3 le soit en position $N-2$, $N-1$ ou N. Et vu ce qui précède sur les cartes placées aux instants T_1 et T_2, on en déduit que les $3! = 6$ configurations possibles sont équiprobables.
Dans les deux exemples cités, les probabilités sont alors égales à $1/3! = 1/6$.

7) Comme dans les exemples précédents, à l'instant $T-1 = T_{N-1}$ la carte C_N se trouve au dessus du paquet et toutes les configurations des $N-1$ cartes situées au dessous sont équiprobables (ce qui s'établit prouve par récurrence).
À l'instant $T = T_{N-1}+1$, on glisse la carte C_N en position k en tirant le nombre k au hasard selon une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On obtient alors un jeu de cartes dans l'une des $N!$ configurations possibles, avec autant de chances pour chacune des configurations.

8) $T = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_{N-1} + 1$. Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(T) &= E(\Delta_1) + E(\Delta_2) + \cdots + E(\Delta_{N-1}) + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{N-1}\frac{N}{i} + 1 = \sum_{i=1}^{N}\frac{N}{i} \\
&= NH_N
\end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance des variables $(\Delta_1, \cdots, \Delta_{N-1}, 1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
V(T) &= V(\Delta_1) + V(\Delta_2) + \cdots + V(\Delta_{N-1}) + V(1) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1}\frac{N(N-i)}{i^2} + 0 \\
&= N^2\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i^2} - N\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i} \\
&= N^2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i^2} - N\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} \qquad \text{car } 1 = N^2\frac{1}{N^2} = N\frac{1}{N}
\end{aligned}$$

9) **a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : t \mapsto 1/t$ est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$. Donc $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$. En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[k, k+1]$, on obtient l'encadrement demandé.

b) (i) $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n = \dfrac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)] = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant 0$ (en utilisant l'inégalité de gauche de l'encadrement qui précède). La suite u est donc décroissante.

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, sommons les inégalités de droite de l'encadrement de la question 9.a pour $k = 1..n$. On obtient alors

$$\underbrace{\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{=\ln(n+1)} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{=H_n}$$

Si $n = 1$, $H_1 = 1 \leq \ln(1) + 1$. Si $n \geq 2$, on somme les inégalités de gauche pour $k = 1$ à $n - 1$ et on obtient : $(H_n - 1) \leqslant \displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n)$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq u_n \leq 1$.
Décroissante et minorée par 0, la suite (u_n) est donc convergente. L'encadrement permet de dire que sa limite γ appartient au segment $[0, 1]$.

10) a) En utilisant les questions 8 et 9.b.ii on sait que :
$N \ln(N+1) \leq E(T) = NH_N \leq N \ln(N) + N$. Donc

$$\frac{\ln(N+1)}{\ln(N)} \leqslant \frac{E(T)}{N \ln(N)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(N)}$$

Or $\ln(N+1) = \ln(N) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{N}\right)$, donc $\dfrac{\ln(N+1)}{\ln(N)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)}{\ln(N)} \longrightarrow 1$

Ainsi, par encadrement, la suite $\left(\dfrac{E(T)}{N \ln(N)}\right)_N$ tend vers 1, c'est-à-dire $E(T) \sim N \ln N$.
De plus $E(T) - N \ln(N) = Nu_N = N(\gamma + o(1)) = N\gamma + o(N)$.
N.B. Remarquons que ce développement asymptotique permet de retrouver directement l'équivalent $E(T) \sim N \ln(N)$ car $N = o(N \ln(N))$.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$. Cette suite $(S_n)_n$ est convergente (série de Riemann). Notons α sa limite. On sait que $(S_n)_n$ est croissante donc

$$\forall n \geq 1, \quad \alpha \geq S_n \geq S_1 > 0$$

Or $\dfrac{V(T)}{N^2} = S_N - \dfrac{H_N}{N}$ et $\dfrac{H_N}{N} \sim \dfrac{\ln(N)}{N} \longrightarrow 0$, donc la suite $(V(T)/N^2)_N$ est convergente vers α.
On a bien

$$V(T) \sim \alpha N^2$$

De plus,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \frac{V(T)}{N^2} = S_N - \frac{H_N}{N} \leq \alpha - \frac{H_N}{N} \leqslant \alpha$$

11) a) •Pour $\omega \in \Omega$, $T(\omega) - N \ln(N) = T - E(T) + Nu_N$. En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$|T(\omega) - N \ln(N)| \leqslant |T(\omega) - E(T)| + |Nu_N| \leqslant |T(\omega) - E(T)| + N$$

car avec 9.b.ii, $0 \leq Nu_N \leqslant N$.
•Supposons que pour un $\omega \in \Omega$, on ait $|T(\omega) - N \ln(N)| \geqslant cN$, alors grâce à l'inégalité précédente, on en déduit : $|T(\omega) - E(T)| + N \geqslant cN$, donc $|T(\omega) - E(T)| \geqslant (c-1)N$. On a donc l'inclusion des événements :

$$\Big(|T - N \ln(N)| \geqslant cN\Big) \subset \Big(|T - E(T)| \geqslant N(c-1)\Big)$$

b) On en déduit $\mathbf{P}\Big(|T - N \ln(N)| \geqslant cN\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(|T - E(T)| \geqslant N(c-1)\Big)$ et en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev à la variable aléatoire T, on a la majoration

$$\mathbf{P}\Big(|T - E(T)| \geqslant N(c-1)\Big) \leqslant \frac{V(T)}{(N(c-1))^2}$$

En utilisant enfin la question 10b, on peut conclure

$$\mathbf{P}\Big(|T - N\ln(N)| \geqslant cN\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(|T - E(T)| \geqslant N(c-1)\Big) \leqslant \frac{\alpha}{(c-1)^2}$$

Par encadrement, si N est fixé : $\lim\limits_{c\to+\infty} \mathbf{P}\Big(|T - N\ln N| \geqslant cN\Big) = 0$

12) Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de la question 11.b avec $c = \varepsilon\ln(N)$ (c peut être supposé > 1 pour N assez grand), on obtient

$$\mathbf{P}\Big(|T - N\ln(N)| \geqslant \varepsilon N\ln(N)\Big) \leqslant \frac{\alpha}{(\varepsilon\ln(N) - 1)^2} \longrightarrow_{N\to+\infty} 0$$

Par encadrement :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\Big(|T - N\ln(N)| \geqslant \varepsilon N\ln(N)\Big) = 0$$

13) **a)** Nous supposons d'abord que $n \geq N$.
Si $n \geqslant T(\omega)$: à l'instant n, toutes les configurations du paquet sont équiprobables, donc : $\mathbf{P}_{(T\leqslant n)}(E_n) = \pi(A)$.
Ainsi $\mathbf{P}\left(E_n \cap (T \leqslant n)\right) = \mathbf{P}_{(T\leqslant n)}(E_n)\mathbf{P}(T \leqslant n) = \pi(A)\mathbf{P}(T \leqslant n)$.
Dans le cas où $n < N$, l'événement $(T \leqslant n)$ est impossible et

$$\mathbf{P}\left(E_n \cap (T \leqslant n)\right) = 0 = \pi(A)\mathbf{P}(T \leqslant n)$$

(cependant dans ce dernier cas, le calcul de la probabilité conditionnelle n'est pas bien défini.)

b) $(E_n \cap (T > n)) \subset (T > n)$ donc $\mathbf{P}(E_n \cap (T > n)) \leqslant \mathbf{P}(T > n)$.

c)

$$\begin{aligned}\mu_n(A) = \mathbf{P}(E_n) &= \mathbf{P}(E_n \cap (T \leqslant n)) + \mathbf{P}(E_n \cap (T > n))\\ &\leqslant \pi(A)\mathbf{P}(T \leqslant n) + \mathbf{P}(T > n)\\ &\leqslant \pi(A) + \mathbf{P}(T > n)\end{aligned}$$

14) **a)** μ_n et π étant des probabilités, on a $\mu_n(\overline{A}) = 1 - \mu_n(A)$ et $\pi(\overline{A}) = 1 - \pi(A)$ donc

$$\mu_n(\overline{A}) - \pi(\overline{A}) = \pi(A) - \mu_n(A)$$

b) L'inégalité de la question 13c donne pour tout $A \subset \mathcal{S}_N$: $\mu_n(A) - \pi(A) \leqslant \mathbf{P}(T > n)$. En utilisant cette inégalité avec la partie $\overline{A}$ au lieu de A, on a aussi $\mu_n(\overline{A}) - \pi(\overline{A}) = \pi(A) - \mu_n(A) \leqslant \mathbf{P}(T > n)$ soit finalement

$$|\mu_n(A) - \pi(A)| \leqslant \mathbf{P}(T > n)$$

15) L'inégalité précédente vaut pour toute partie A de $\mathcal{S}_N$, donc en particulier pour une partie réalisant le maximum ; ainsi $\boxed{d(\mu_n, \pi) \leqslant \mathbf{P}(T > n)}$ et bien sûr $\underline{0 \leqslant d(\mu_n, \pi)}$.
D'autre part, $T = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_{N-1} + 1$ est une somme de variables aléatoires finies presque-sûrement (lois géométriques), donc la variable T est elle-même finie presque-sûrement et $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbf{P}(T > n) = 0$.
Par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} d(\mu_n, \pi) = 0}$.

16) S_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1.

17) Soit $k \in [\![2, N]\!]$, $S_k(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. La variable S_k est le temps d'attente d'un premier succès lors de la répétition d'épreuves aléatoires de Bernoulli identiques et indépendantes, la probabilité p_k d'un succès étant égale à la probabilité d'obtenir un des $N - (k-1)$ timbres encore non reçus parmi les N possibles, soit $p_k = \dfrac{N-k+1}{N}$. Ainsi, $\boxed{S_k \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \dfrac{N-k+1}{N}.}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(S_k = n) = \dfrac{N-(k-1)}{N}\left(\dfrac{k-1}{N}\right)^{n-1}$

18) La loi de S_k est celle de la variable $\Delta_{N-(k-1)}$ (en convenant que Δ_N est la variable certaine égale à 1). En ré-ordonnant l'ordre des termes, on peut écrire $S = S_N + S_{N-1} + \cdots + S_2 + S_1$ et comme les variables S_k sont indépendantes, $\underline{S \text{ suit bien la même loi que la variable}}$: $\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_{N-1} + \Delta_N = \underline{T}$

19) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

a) $(S > m)$ correspond à l'événement "le jour m, la collection des timbres reçus n'est pas encore complète" ou de manière équivalente "le jour m, il existe au moins un des N timbres qui n'a pas été obtenu". Donc $\boxed{(S > m) = B_1^m \cup B_2^m \cup \ldots \cup B_N^m}$.

b) Soit $j \in [\![1, N]\!]$. $\mathbf{P}(B_j^m) = \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^m = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^m$

c) $\mathbf{P}(S > m) = \mathbf{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{N} B_j^m) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{N} \mathbf{P}(B_j^m) = N\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^m$.

20) **a)** On établit l'inégalité : $\forall\, x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$, par exemple grâce à une étude des variations de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $]-1, +\infty[$.

b) $\ln\left(1 - \dfrac{1}{N}\right) \leqslant -\dfrac{1}{N}$ car $-1/N > -1$ et comme exp est croissante : $e^{m\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)} \leqslant e^{-m/N}$. Donc :

$$\mathbf{P}(T > m) = \mathbf{P}(S > m) = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^m = Ne^{m\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)} \leqslant Ne^{-m/N}$$

21) **a)** Soit $c > 0$ et $n \geq N\ln N + cN$ on a : $d(\mu_n, \pi) \leqslant \mathbf{P}(T > n) \leqslant Ne^{-n/N}$.
Or $-n/N \leqslant -\ln(N) - c$ et comme exp est croissante : $e^{-n/N} \leqslant e^{-\ln(N)-c} = \dfrac{1}{N}e^{-c}$. Ainsi

$$\boxed{d(\mu_n, \pi) \leqslant e^{-c}}$$

b) *Application numérique.* Avec $N = 32$ on cherche n de sorte que $d(\mu_n, \pi) \leqslant 0.2$. Vu l'inégalité précédente, il suffit de choisir c de sorte que $e^{-c} \leqslant 0.2$ soit $c \geq \ln 5$. Donc $n \geq N\ln(N) + \ln(5)N = 32\ln(160) \approx 162.4$.
Il faudra donc au moins 163 battages par insertions pour considérer le paquet bien mélangé.