Épreuve de Mathématiques 8

Correction

Exercice 1 (D'après CCP TSI 2013)

cf correction en classe.

Exercice 2 (D'après PT 2009, partie IV)

1) La quadrique $\mathscr{Q}$ est un ellipsoïde de coefficients $a = 2$, $b = 1$ et $c = 2$.

Montrons que $\mathscr{Q}$ est de révolution d'axe (Oy). La section de $\mathscr{Q}$ par un plan d'équation $y = K$ a pour équation $x^2 + z^2 = 1 - 4K^2$. Elle est soit vide, soit un cercle centré en $(0, K, 0) \in (Oy)$.

$\boxed{\text{Une équation d'une méridienne, par exemple dans le plan } (Oxy)\text{, sera } \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\text{, c'est une ellipse.}}$

En conclusion, $\boxed{\text{La quadrique } \mathscr{Q} \text{ est un ellipsoïde de révolution d'axe } (Oy).}$

2) On a effectué un changement d'origine, S ayant pour coordonnées $(x_0, 0, z_0)$ dans le repère d'origine O, et $(0, 0, 0)$ dans le repère d'origine S. Il vient

$$x = X + x_0 \qquad ; \qquad y = Y \qquad \text{et} \qquad z = Z + z_0$$

Ainsi, les équations cartésiennes de $\mathscr{E}$ sont

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{(X + x_0)^2}{4} + Y^2 = 1 \\ Z + z_0 = 0 \end{cases}}$$

3) On suppose $M \neq S$. En utilisant les notations de la géométrie affine, il vient, dans le repère $(S, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$,

$$\begin{aligned} M(X, Y, Z) \in \mathcal{C} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \quad S + \lambda\overrightarrow{SM} \in \mathscr{E} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \quad f(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = 0 \quad \text{et} \quad g(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \quad \begin{cases} \dfrac{(\lambda X + x_0)^2}{4} + \lambda^2 Y^2 = 1 \\ \lambda Z + z_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $Z = 0$, alors la seconde équation donne $z_0 = 0$ ce qui est absurde. Donc on peut supposer $Z \neq 0$.

$$\begin{aligned} M(X, Y, Z) \in \mathcal{C} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \quad \begin{cases} \dfrac{(\lambda X + x_0)^2}{4} + \lambda^2 Y^2 - 1 = 0 \\ \lambda = -\dfrac{z_0}{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dfrac{(-\frac{z_0}{Z} X + x_0)^2}{4} + \dfrac{z_0^2}{Z^2} Y^2 - 1 = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \quad \lambda = -\dfrac{z_0}{Z} \end{cases} \\ &\iff \frac{(x_0 Z - z_0 X)^2}{4} + z_0^2 Y^2 - Z^2 = 0 \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, multiplier par Z^2 rajoute le point S, on obtient donc l'équation de $\mathcal{C}$ tout entier.

4) **a)**
$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \frac{z_0^2}{4}-\lambda & 0 & -\frac{x_0z_0}{4} \\ 0 & z_0^2-\lambda & 0 \\ -\frac{x_0z_0}{4} & 0 & \frac{x_0^2}{4}-1-\lambda \end{pmatrix} = (z_0^2-\lambda)\det\begin{pmatrix} \frac{z_0^2}{4}-\lambda & -\frac{x_0z_0}{4} \\ -\frac{x_0z_0}{4} & \frac{x_0^2}{4}-1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (z_0^2-\lambda)\left[\left(\frac{z_0^2}{4}-\lambda\right)\left(\frac{x_0^2}{4}-1-\lambda\right)-\left(\frac{x_0z_0}{4}\right)^2\right]$$
$$= (z_0^2-\lambda)\left(\lambda^2-\left(\frac{x_0^2}{4}+\frac{z_0^2}{4}-1\right)\lambda-\frac{z_0^2}{4}\right)$$

b) $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est symétrique réelle, donc diagonalisable.}}$

c) Calculons le discriminant : $\Delta = b^2-4ac = b^2+(z_0)^2$
Or $z_0 \neq 0$ par hypothèse, donc $\Delta > 0$ et $\boxed{P \text{ ne peut pas admettre de racine double.}}$

d) La matrice A admet une valeur propre double si et seulement si le polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda) = (z_0^2-\lambda)P(\lambda)$ admet une racine double. Or d'après la question précédente, P n'a pas de racines doubles. Donc la seule possibilité restante est z_0^2 racine du polynôme P.

5) L'équation du cône $\mathcal{C}$ de sommet S est donc, en développant l'expression obtenue en 3,

$$\frac{z_0^2}{4}X^2-2\frac{x_0z_0}{4}XZ+z_0^2Y^2+\left(\frac{x_0^2}{4}-1\right)Z^2=0$$

La matrice associée à la forme quadratique définissant la quadrique est donc la matrice A étudiée à la question 4.
Le cône $\mathcal{C}$ est de révolution si et seulement si il existe un repère orthonormé $(S;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ relativement auquel l'équation du cône est de la forme : $\alpha(X'^2+Y'^2)+f(Z')=0$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f(Z')$ une expression en Z' (le cône est alors de révolution autour de la droite passant par S et dirigée par $\overrightarrow{w}$).
Ce qui revient à dire que la matrice A admet une valeur propre double α.
D'après 4)d), A admet une valeur propre double si et seulement si z_0^2 est racine de P, c'est-à-dire

$$P(z_0^2) = z_0^4-\left(\frac{x_0^2}{4}+\frac{z_0^2}{4}-1\right)z_0^2-\frac{z_0^2}{4}=0$$

Après simplification par $z_0\neq 0$, il vient $\frac{x_0^2}{3}-z_0^2=1$.
L'ensemble des sommets S pour lesquels le cône $\mathcal{C}$ est de révolution est donc l'hyperbole d'équation $\frac{x_0^2}{3}-z_0^2=1$ du plan $y=0$.

Rapport du jury pour l'exercice 3

Le début de l'exercice (questions 1 à 3) ne suit pas le sujet d'origine.
« La dernière partie étudiait le lieu des sommets d'un cône s'appuyant sur une ellipse fixée pour lesquels le cône est de révolution (ce lieu est une hyperbole dans un plan perpendiculaire au plan de l'ellipse). Cette partie, courte, a été en général traitée de façon raisonnable mais bien souvent de façon un peu rapide et désordonnée, probablement à cause d'un manque de temps en fin d'épreuve. »

Exercice 3 (CCP TSI 2009)

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$, que l'on appellera le repère fixe.
Pour tout $\theta\in[0,2\pi[$, on désigne par $\overrightarrow{u}(\theta)$ et $\overrightarrow{v}(\theta)$, ou simplement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, les vecteurs :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}(\theta) &= \cos(\theta)\overrightarrow{\imath}+\sin(\theta)\overrightarrow{\jmath}\\ \overrightarrow{v}(\theta) &= -\sin(\theta)\overrightarrow{\imath}+\cos(\theta)\overrightarrow{\jmath}\end{aligned}$$

Soit M un point de $\mathbb{R}^3$, on désigne par m la projection orthogonale de M sur le plan $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ et par (r,θ) les coordonnées polaires du point m.

On appelle *coordonnées cylindriques du point M* le triplet (r, θ, z).
On appelle *repère cylindrique* le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})$.
On désigne par Σ la surface d'équation cartésienne :

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Partie 1

1) a) $\boxed{\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \\ z & = & z \end{array}}$

b) Comme $M \neq O$, $r \neq 0$ et il vient $\boxed{M \in \Sigma \iff z = \dfrac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)}$

On obtient donc le paramétrage suivant :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \\ z & = & \cos(2\theta) \end{array} \right. \end{array}}$$

c) La fonction cosinus est comprise entre -1 et 1, donc, d'après le paramétrage obtenu au 1)b), Σ est compris entre les plans $z = -1$ et $z = 1$.

d) Le paramétrage obtenu au 1)b) s'écrit $\left\{ \begin{array}{rcccl} x & = & 0 & + & r\cos\theta \\ y & = & 0 & + & r\sin\theta \\ z & = & \cos(2\theta) & & \end{array} \right.$

Ainsi la famille $(\mathscr{D}_\theta)_{\theta \in [0, 2\pi[}$ de droites d'équations paramétriques données ci-dessus (à θ fixé) recouvrent Σ. La droite $\mathscr{D}_\theta$ passe par le point de coordonnées $(0, 0, \cos(2\theta))$ et a pour vecteur directeur $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

2) a) Un vecteur normal sera donnée par $\overrightarrow{N}(r, \theta) = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}(r, \theta) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}(r, \theta)$. Effectuons le calcul dans les coordonnées cylindrique [1], où $\dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \theta} = \overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \cos(2\theta) \end{pmatrix} \implies \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}(r, \theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -2\sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

En effectuant le produit vectoriel, il vient $\boxed{\overrightarrow{N}(r, \theta) = r\overrightarrow{k} + 2\sin(2\theta)\overrightarrow{v}.}$
La direction de ce vecteur dépend de r, donc n'est pas constante le long des génératrices $\mathscr{D}_\theta$, ainsi $\boxed{\text{La surface n'est pas développable.}}$

b) Un point P de coordonnées (X, Y, Z) dans le repère cylindrique appartient à Π_M si et seulement si $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{N} = 0$, ce qui se traduit en équation par

$$\boxed{2\sin(2\theta)Y + r(Z - \cos(2\theta)) = 0}$$

c) Un point P de coordonnées (X, Y, Z) dans le repère cylindrique appartient à Π_M si et seulement si $\overrightarrow{MP}$, $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}(r, \theta)$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}(r, \theta)$ sont colinéaires. ce qui se traduit en équation par

$$\det\left(\overrightarrow{MP}, \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}(r, \theta), \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}(r, \theta)\right) = \det\begin{pmatrix} X - r & 1 & 0 \\ Y & 0 & r \\ Z - \cos(2\theta) & 0 & -2\sin(2\theta) \end{pmatrix} = 0$$

1. Lorsque l'on dérive par rapport à θ, tout fonctionne comme en polaire, avec du $(r\overrightarrow{u} + z\overrightarrow{k})' = r'\overrightarrow{u} + r\overrightarrow{v} + z'\overrightarrow{k}$.
Par rapport à r, le repère est fixe, donc tout se passe comme dans le repère fixe.

En développant par rapport à la dernière ligne, on se retrouve à calculer les coefficients de $\overrightarrow{N}$ et on retrouve donc l'équation de Π_M trouvée à la question précédente...

d) D'après le cours, on sait que la droite $\mathscr{D}_{\theta_0}$ passant par $M(r,\theta_0)$ est contenue dans le plan tangent Π_M. Elle admet pour vecteur directeur (dans le repère mobile) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et est donc horizontale.

Ce résultat peut se redémontrer dans notre cas : la droite $\mathscr{D}_\theta$ a pour équation paramétrique dans le repère mobile

$$\begin{cases} X_{\mathscr{D}} &= r \\ Y_{\mathscr{D}} &= 0 \\ Z_{\mathscr{D}} &= \cos(2\theta) \end{cases}$$

(d'après 1)d)), donc est par construction incluse dans Σ, et pour tout $r\in\mathbb{R}$,

$$2\sin(2\theta)Y_{\mathscr{D}} + r(Z_{\mathscr{D}} - \cos(2\theta)) = 0 + r(\cos(2\theta) - \cos(2\theta) = 0$$

Donc $\mathscr{D}_\theta \subset \Sigma\cap\Pi_M$. Ainsi, $\boxed{\mathscr{D}_\theta \subset \Sigma\cap\Pi_M}$

3) Revenons[2] à l'équation $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Pour $(x,y)\neq(0,0)$, elle est équivalente à $z(x^2+y^2)-x^2+y^2=0$. Notons $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)-x^2+y^2$.

Un vecteur normal au plan tangent est donné par $\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x(z-1)\\2y(z+1)\\x^2+y^2\end{pmatrix}$. On se place au point M de coordonnées (a,b,c), et on considère le point P de coordonnées (x,y,z).

$$\begin{aligned} P\in\Pi_M &\iff \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{N} = 0 \iff \begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2a(c-1)\\2b(c+1)\\a^2+b^2\end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x-a)2a(c-1) + (y-b)2b(c+1) + (z-c)(a^2+b^2) = 0 \\ &\iff 4ab^2x - 4a^2by - (a^2+b^2)^2z + a^4 - b^4 = 0 \end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtient en développant et utilisant $c = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Partie 2

1) **a)** Soit $M(t)\in\Gamma$. D'après 1)b), $\boxed{M\in\Sigma \iff z(t) = \cos(2\theta(t))}$

b) Le point M est régulier, donc la tangente en M est portée par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{dt}$.

De plus $\overrightarrow{OM} = r(t)\overrightarrow{u} + \cos(2\theta(t))\overrightarrow{k}$ d'après la question précédente. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{dt} = r'(t)\overrightarrow{u} + r(t)\theta'(t)\overrightarrow{v} - 2\theta'(t)\sin(2\theta(t))\overrightarrow{k}$$

Il reste à vérifier que ce vecteur est orthogonal à un vecteur normal de Σ, calculé en 2)a) :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}.\overrightarrow{N}(r(t),\theta(t)) &= \begin{pmatrix}r'(t)\\r(t)\theta'(t)\\-2\theta'(t)\sin(2\theta(t))\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\2\sin(2\theta(t))\\r(t)\end{pmatrix} \\ &= r(t)\theta'(t)2\sin(2\theta(t)) - 2\theta'(t)\sin(2\theta(t))r(t) = 0 \end{aligned}$$

La direction de la tangente $\mathcal{T}_{M,\Sigma}$ en M à la courbe Γ est donc contenu dans le plan *vectoriel* tangent en M à la surface Σ. De plus, $\mathcal{T}_{M,\Sigma}$ et Π_M ont le point M en commun.

Donc $\boxed{\mathcal{T}_{M,\Sigma}\subset\Pi_M.}$

2. On peut aussi effectuer le changement de repère pour se ramener à une équation en (x,y,z) à partir de celle trouvée en 2)b), puis exprimer les $\sin\theta$ et $\cos\theta$ en fonction des coordonnées (a,b,c) de M.

2) $\boxed{\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\overrightarrow{u} + \cos(2\theta)\overrightarrow{k}}$ d'où
$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = \qquad r'(\theta)\overrightarrow{u} + \quad r(\theta)\overrightarrow{v} - 2\sin(2\theta)\overrightarrow{k} \\ \bullet\ \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta))\overrightarrow{u} + 2r'(\theta)\overrightarrow{v} - 4\cos(2\theta)\overrightarrow{k} \end{array}}$$

3) **a)** Le plan tangent Π_M et le plan osculateur P_M ont le point M en commun, donc ils coïncident si et seulement si les plans vectoriels sont égaux.

C'est-à-dire si $\boxed{\overrightarrow{N}(r(\theta),\theta) \text{ est orthogonal à } \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) \text{ et à } \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta).}$

b) Explicitons la condition trouvée à la question précédente. D'après 1.2)a), $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin(2\theta) \\ r \end{pmatrix}$ donc

$$\overrightarrow{N}(r(\theta),\theta).\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = 0 \iff 2\sin(2\theta)r - r2\sin(2\theta) = 0 \tag{1}$$
$$\overrightarrow{N}(r(\theta),\theta).\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta) = 0 \iff 2\sin(2\theta)2r' - r4\cos(2\theta) = 0 \tag{2}$$

La première équation est donc toujours vraie, ce qui a été prouvé en 2.1)b). La seconde s'écrit

$$\boxed{\sin(2\theta)r'(\theta) - \cos(2\theta)r(\theta) = 0}$$

c) Pour $\theta \neq 0[\pi]$, l'équation trouvée à la question précédente s'écrit $r' = \dfrac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}r$ qui a pour solution générale sur un intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$

$$r(\theta) = Ce^{\frac{1}{2}\ln(|\sin(2\theta)|)} = C\sqrt{|\sin(2\theta)|}$$

On retrouve (à $\dfrac{\pi}{4}$ près) la courbe étudiée dans l'exercice 1 (PT2006).

Annexe 1 (Maple)

La surface étudié à l'exercice 3, sur le disque unité.

```
> restart :with(plots) :
> cylinderplot([r,theta,cos(theta)^2-sin(theta)^2],theta=-Pi..Pi,r=0.0001..100,
grid=[150,10],axes=boxed,style=patch) ;
```

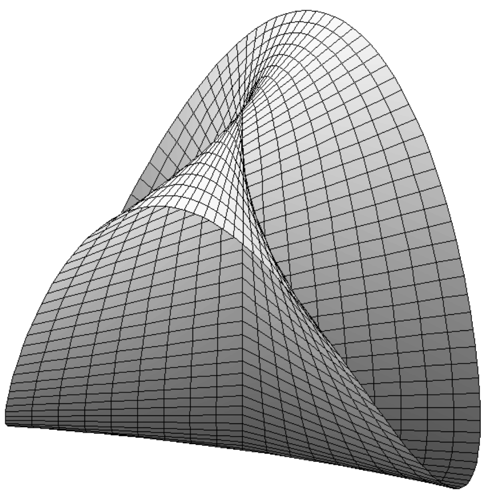

FIGURE 1 – Surface d'équation $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ au-dessus du disque unité