Épreuve de Mathématiques 8

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (D'après CCP TSI 2013)

On se place dans un espace euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit Σ la surface d'équation :

$$3x^2 + y^2 - yz + z^2 = 1$$

On considère les points $A(1, 0, 0)$ et $N(0, 0, 1)$.

1) Nature de la quadrique Σ.

2) On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x = \frac{1}{3}$ et la courbe $\mathscr{E} = \mathscr{P} \cap \Sigma$.

  a) Montrer que $M(x, y, z) \in \mathscr{E} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$.

  b) Justifier que la courbe $\mathscr{E}$ est une conique et donner son équation réduite dans un repère orthonormé du plan $\mathscr{P}$ que l'on précisera.

3) On dit qu'un point $M(x, y, z)$ de la surface Σ est *visible* du point A lorsque, pour tout $M'(x', y', z')$, point d'intersection de la surface Σ et de la droite (AM), on a $x' \leqslant x$.

  a) Justifier que $N \in \Sigma$.

  b) Donner les coordonnées du point d'intersection de la droite (NA) et de la surface Σ. En déduire que le point N n'est pas visible du point A.

On admet que la partie visible du point A de la surface Σ est délimitée par une courbe constituée des points M tels que la droite (AM) soit tangente à la surface Σ en M. Cette courbe est le contour apparent conique de la surface $Sigma$ issu du point A.
On note Γ le contour apparent conique.
On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\varphi(u, v, w) = 3u^2 + v^2 - vw + w^2 - 1$.

4) Soit $B\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. Montrer que $B \in \Sigma$, et déterminer une équation cartésienne du plan tangent Π_B à Σ en B.

5) A-t-on $A \in \Pi_B$? En déduire que $B \in \Gamma$.

6) Soit $T(u, v, w) \in \Sigma$. Établir une équation cartésienne du plan tangent Π_T en T à la surface Σ.

7) Conclure que Γ est la conique $\mathscr{E}$.

Exercice 2

Exercice 3 (D'après PT 2009, partie IV)

On se place dans l'espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1) Soit $\mathscr{Q}$ la surface d'équation $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$. Déterminer la nature de $\mathscr{Q}$. Est-elle de révolution ? Si oui, préciser une équation et la nature d'une méridienne.

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Soit $\mathcal{C}$ un cône de sommet S s'appuyant sur $\mathscr{E}$.
Nous cherchons une condition sur S pour que $\mathcal{C}$ soit de révolution.
Pour des raisons de symétrie, si le cône $\mathcal{C}$ est de révolution, le sommet S appartient au plan $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{k})$. On supposera donc dans toute cette partie que S a pour coordonnées $(x_0,0,z_0)$, avec $z_0\neq 0$.

2) Déterminer les équations cartésiennes $f(X,Y,Z)=0$ et $g(X,Y,Z)=0$ de l'ellipse $\mathscr{E}$ dans le repère $(S,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$ de centre S.

3) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $(S,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$ est

$$M(X,Y,Z)\in\mathcal{C} \iff \frac{(x_0Z-z_0X)^2}{4}+z_0^2Y^2-Z^2=0$$

4) On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{z_0^2}{4} & 0 & -\dfrac{x_0z_0}{4} \\ 0 & z_0^2 & 0 \\ -\dfrac{x_0z_0}{4} & 0 & \dfrac{x_0^2}{4}-1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

b) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

c) Montrer que le polynôme $P(\lambda)=\lambda^2-\left(\dfrac{x_0^2+z_0^2-4}{4}\right)\lambda-\dfrac{z_0^2}{4}$ ne peut pas admettre de racine double.

d) En déduire que la matrice A admet une valeur propre double si et seulement si z_0^2 est racine du polynôme P.

5) Déterminer l'ensemble des sommets S pour lesquels le cône $\mathcal{C}$ est de révolution.

Exercice 4 (CCP TSI 2009)

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$, que l'on appellera le repère fixe.
Pour tout $\theta\in[0,2\pi[$, on désigne par $\overrightarrow{u}(\theta)$ et $\overrightarrow{v}(\theta)$, ou simplement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, les vecteurs :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}(\theta) &= \cos(\theta)\overrightarrow{\imath}+\sin(\theta)\overrightarrow{\jmath} \\ \overrightarrow{v}(\theta) &= -\sin(\theta)\overrightarrow{\imath}+\cos(\theta)\overrightarrow{\jmath} \end{aligned}$$

Soit M un point de $\mathbb{R}^3$, on désigne par m la projection orthogonale de M sur le plan $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ et par (r,θ) les coordonnées polaires du point m.
On appelle *coordonnées cylindriques du point M* le triplet (r,θ,z).
On appelle *repère cylindrique* le repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{k})$.
On désigne par Σ la surface d'équation cartésienne :

$$z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Partie 1

1) **a)** Exprimer les coordonnées (x,y,z) d'un point M en fonction de ses coordonnées cylindriques (r,θ,z).

b) Déterminer une équation de la surface Σ en coordonnées cylindriques. En déduire un paramétrage $(r,\theta) \mapsto M(r,\theta)$ de la surface.

c) Montrer que la surface est contenue dans une partie de $\mathbb{R}^3$ comprise entre deux plans parallèles sont on donnera une équation.

d) Montrer que la surface Σ est réglée. On précisera un vecteur directeur pour chaque génératrice.

2) **a)** Montrer qu'un vecteur normal $\overrightarrow{N}(r,\theta)$ à la nappe paramétrée Σ est égal à $r\,\overrightarrow{k} + 2\sin(2\theta)\overrightarrow{v}$. La surface est-elle développable ?

b) En déduire une équation, dans le repère cylindrique, du plan tangent Π_M à Σ au point M de paramètres (r,θ). On notera (X,Y,Z) les coordonnées d'un point P dans le repère cylindrique.

c) Retrouver l'équation de Π_M en utilisant uniquement les vecteurs $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}(r,\theta)$.

d) Montrer que l'intersection de Σ et de Π_M contient la droite horizontale passant par le point de coordonnées cylindriques $(0,0,\cos(2\theta))$.

3) Déterminer une équation du plan tangent à Σ dans le repère fixe $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$.

Partie 2

On dit qu'une courbe de $\mathbb{R}^3$, définie par un arc paramétré $t \mapsto M(t)$, défini d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, est tracé sur la surface Σ si et seulement si le point $M(t)$ appartient à Σ pour tout $t \in I$.

1) **a)** L'arc paramétré Γ est défini en coordonnées cylindriques par une application $\left\{\begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (r(t),\theta(t),z(t)) \end{array}\right.$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le point M appartienne à la surface Σ.

b) On suppose désormais que l'arc paramétré $t \mapsto M(t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ au moins et qu'il est tracé sur la surface Σ. Soit M un point régulier de la courbe.

Démontrer que la tangente en M à la courbe Γ est contenu dans le plan tangent en M à la surface Σ.

2) On suppose que la courbe Γ est définie par une fonction $\theta \mapsto r(\theta)$, c'est-à-dire, en coordonnées cylindriques, par une application $\left\{\begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (r(\theta),\theta,\cos(2\theta)) \end{array}\right.$ (Cette courbe est donc tracée sur Σ).

Donner une expression du vecteur $\overrightarrow{OM}(\theta)$ dans le repère cylindrique, puis des vecteurs $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)$.

3) En tout point $M(\theta)$ de l'arc paramétré Γ tel que les vecteurs $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)$ soient linéairement indépendants, on appelle plan osculateur à la courbe Γ en ce point le plan affine

$$\left(M(\theta), \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta), \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)\right)$$

qui sera noté P_M.

On appelle ligne asymptotique de la surface Σ une courbe tracée sur Σ telle qu'en tout point M de la courbe, le plan tangent Π_M à la surface coïncide avec le plan osculateur P_M à la courbe.

a) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les vecteurs $\overrightarrow{N}(r(\theta),\theta)$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)$, la courbe Γ est-elle une ligne asymptotique de Σ ?

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe Γ soit une ligne asymptotique de Σ sous forme d'une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction r.

c) En résolvant l'équation différentielle précédente, en déduire les équations polaires des projections sur le plan $z = 0$ des lignes asymptotiques.

FIN DE L'ÉPREUVE