Épreuve de Mathématiques 8

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère les quadriques Q_1, Q_2 et Q_3 d'équations cartésiennes respectives :

$$4x^2 + 9y^2 = 10 \quad , \quad 4x^2 - 9y^2 - 16z^2 = 144 \quad , \quad 3x^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz + 2zx - 1 = 0$$

1) Déterminer la nature de Q_1 et Q_2.

2) Déterminer la matrice A de la forme quadratique associée à la quadrique Q_3.

3) Donner une équation réduite de Q_3 dans un repère orthonormé que l'on ne cherchera pas à déterminer.

4) Déterminer la nature de Q_3. Déterminer son axe de révolution.

Exercice 2

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équations

$$x = 1 \qquad \text{et} \qquad y^2 - z^2 = 4$$

1) Quelle est la nature de $\mathcal{H}$?

2) Montrer que la surface S engendrée par les droites D, qui rencontrent l'axe $(O, \vec{k})$ et la courbe $\mathcal{H}$, tout en restant parallèles au plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, a pour équation

$$y^2 = x^2(z^2 + \beta^2)$$

où β est un réel que l'on déterminera.
Les candidats qui n'ont pas trouvé la valeur de β sont invités à composer en gardant β comme paramètre.

3) Donner une équation cartésienne du plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. En déduire une équation cartésienne du cylindre tangent à S de direction $\vec{\jmath}$.

4) Donner une équation de la section de S par le plan d'équation $x = b$, où b désigne un réel.
En déduire la nature de cette section ainsi que ses sommets et ses foyers. On étudiera à part le cas du plan $x = 0$.

5) Donner une équation de la section S_0 de S par le plan d'équation $y = c$ où c désigne un réel.

6) On paramètre S_0 par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{c}{2}\cos t \\ y(t) = c \\ z(t) = 2\tan t \end{cases}$ où $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

En considérant S_0 comme une courbe plane dans le plan $y = c$, déterminer la courbure de S_0 au point de paramètre t. En déduire le lieu des points d'inflexions de S_0.

Exercice 3

Soit F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1) On considère $\mathbb{R}^2$ orienté muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit Γ la courbe d'équation cartésienne $F(x,y) = 0$.

a) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_t$ la droite d'équation $y = tx$. Déterminer l'intersection $\mathscr{D}_t \cap \Gamma$.

b) Pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq -1$,

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{2t^2}{1+t^3}$$

On note Φ la courbe de paramétrage $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Comparer Γ et Φ. On précisera si l'on a une inclusion ou une égalité.

c) Étudier la courbe paramétrée Φ : tableau de variations et étude d'éventuelles branches infinies.

d) Donner l'allure de Γ.

e) Donner une représentation polaire de Γ. On notera (u_θ, v_θ) le repère polaire et on calculera $r(\theta)$ tel que $M(\theta) = r(\theta)u_\theta$ soit sur Γ pour des valeurs de θ que l'on précisera.

f) Déterminer deux (différentes) transformations orthogonales $u \in O(\mathbb{R}^2)$ telles que $u(\Gamma) = \Gamma$. On justifiera la réponse.

2) On considère $\mathbb{R}^3$ orienté muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On note ici

$$\Gamma = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y) = 0\} \qquad \Delta = \{(x,x,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y)\}$

a) Que représente Γ vis à vis de la surface S.

b) Soit $M(x,y,0)$. Déterminer la projection orthogonale de M sur la droite Δ. En déduire la distance euclidienne de M à la droite Δ.

c) Soit de plus $N(X,Y,Z)$. Déterminer à quelles conditions N et M ont la même projection orthogonale sur Δ, et sont à la même distance euclidienne de $O = (0,0,0)$.

En déduire une équation cartésienne de la surface Σ décrite alors par ces points N lorsque M décrit Γ (on pourra calculer $(x+y)^3$ et $(x+y)^2$).

d) Déterminer une équation du plan tangent à S au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 = F(x_0, y_0)$. Dans quels cas ce plan est-il horizontal (d'équation de la forme $z = c$) ?

FIN DE L'ÉPREUVE