Vendredi 10 avril 2015

Épreuve de Mathématiques 8.1

Correction

Exercice 1 (PT C 2011)

Préliminaires *(toute cette partie est une question de cours...)*

Désormais, le sujet – et donc le corrigé – passerait par des $= o(\dots)$ plutôt que des majorations.

1) Soit k entier naturel tel que $k \geqslant n_0+1$. f étant décroissante, $\begin{cases} \forall t \in [k, k+1] & f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k) \\ \forall t \in [k-1, k] & f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1) \end{cases}$.

D'où :

$$\boxed{\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

2) Soit $n \geqslant n_0 + 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0+1,\ \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

On remarque (et il est nécessaire de le remarquer, pour la question 1.2.c) que l'inégalité de gauche peut être décalée de 1 : $\forall n \geqslant n_0 \quad \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$

3) Rappelons des résultats du cours :

La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ est une série positive. Elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles définies par :

$$\forall n \geqslant n_0,\ U_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

est majorée et dans ce cas la somme de la série est : $U = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} U_n$.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ de la fonction positive f est convergente si et seulement si la fonction F définie par :

$$\forall x \geqslant n_0,\ F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est majorée et dans ce cas : $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} F(x)$.

On va montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- Supposons que l'intégrale généralisée converge. Comme dans ce cas : $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x \geqslant n_0} F(x)$, la deuxième inégalité du b donne :

$$\forall n \geqslant n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) + f(n_0) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0)$$

La série positive converge puisque la suite de ses sommes partielles est majorée.

- Supposons que la série converge. La première inégalité du b donne alors pour tout $n \geqslant n_0 + 1$: $\displaystyle\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$. D'où :

$$\forall n \geqslant n_0+1,\ F(n+1) = \int_{n_0}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

Quel que soit $x \geqslant n_0$, soit $[x]$ la partie entière de x définie comme l'entier vérifiant $[x] \leqslant x < [x]+1$. Alors , comme F est croissante, car f est positive :

$$\forall x \geqslant n_0,\ F(x) \leqslant F([x]+1) \leqslant \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

Et, comme F est majorée, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On a bien montré la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et en cas de convergence, en passant à la limite pour $n \to +\infty$ dans l' inégalité du 2 :

$$\boxed{\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Partie 1

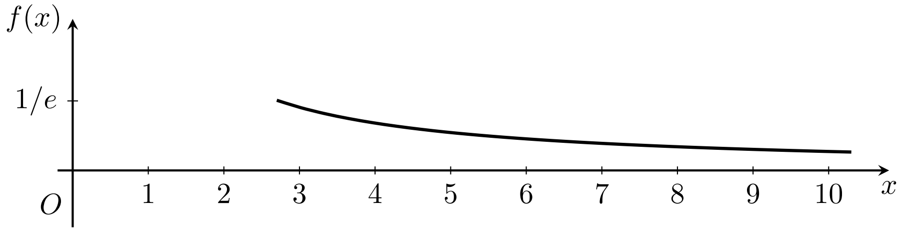
1) a) La fonction f définie sur $[e, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ est C^∞ sur $[e, +\infty[$, car quotient de fonctions C^∞ sur $[e, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas.

$$\forall t \geqslant e, \qquad \boxed{f'(t) = -\frac{\ln(t)+2}{t^2(\ln t)^3}}$$

b) Pour $t \geqslant e$, $\ln t \geqslant 1 > 0$ donc

x	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$1/e$ ↘	0

c)



d) La fonction f est de la forme $u'u^{-2}$ avec $u = \ln$, donc

$$\forall x \geqslant e, \qquad \boxed{F(t) = -\frac{1}{\ln t}}$$

est une primitive de f sur $[e, +\infty[$.

$\displaystyle\int_e^A \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = [F(t)]_e^A = -\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1$, ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} \text{ converge.}}$$

e) La convergence de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$ entraîne la convergence de $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$.

La fonction f est continue, positive et décroissante sur $[3, +\infty[$. Ainsi, d'après le 3) des préliminaires, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$ entraîne celle de la série $\displaystyle\left(\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$, donc celle de la série $\displaystyle\left(\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$:

$$\boxed{\text{La série } \left(\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right) \text{ converge.}}$$

2) (UPS)

a) La fonction g définie sur $[e, +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{t^2(\ln t)^2}$ est C^∞ sur $[e, +\infty[$, car quotient de fonctions C^∞ sur $[e, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas.

$$\boxed{\forall x \geqslant e,\ g'(x) = -2\frac{\ln t + 1}{t^3(\ln t)^3}}$$

b) g décroit sur $[e, +\infty[$ de $\dfrac{1}{e^2}$ à 0. L'axe Ox est asymptote.

c)

d)

$$\forall t \geqslant e,\ 0 \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Or l'intégrale de Riemman $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge car l'exposant de t au dénominateur est strictement supérieur à 1.

Par comparaison par inégalité des intégrales généralisées des fonctions positives,

$$\boxed{\text{l'intégrale généralisée } \int_e^{+\infty} \frac{1}{t^2(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge aussi.}}$$

e) D'après le préliminaire, puisque g est continue et décroissante sur $[e, +\infty[$,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} g(n) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2(\ln n)^2} \text{ converge.}}$$

3) Posons $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$ et $F(t) = \dfrac{1}{2}(\ln t)^2$ une primitive de f, définie sur $[1, +\infty[$. Donc

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} f(p) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

(C'est un exercice de la feuille sur les séries numériques)

a) Soit $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_n^{n+1} = \boxed{\frac{1}{2}\Big(\ln(n+1)^2 - \ln(n)^2\Big)}$

b) Soit $n \geqslant e$. $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Or f est continue, positive, décroissante sur $[e, +\infty[$, donc d'après la partie droite de l'encadrement obtenue en Préliminaire.1), $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante.}}$

c) Soit $n_0 = 3$ et $n \geqslant 3$.

D'après la remarque faite au Préliminaire, question 2, $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$. Par conséquent,

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} f(p) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\sum_{p=1}^{2} f(p) - \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t}_{=\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}(\ln 3)^2} + \underbrace{\sum_{p=n_0}^{n} f(p) - \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} + \int_n^{n+1} \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, pour $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}$. La décroissance de (u_n) (question 2.b) nous permet de conclure que $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n \geqslant \dfrac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}}$

d) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante (question 2.b.) et minorée (question 2.c.) donc $\boxed{\text{Convergente}}$

e) Soit $n \geqslant 2$. La fonction ln est croissante donc pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\ln p \leqslant \ln n$. Comme $\dfrac{1}{p} \geqslant 0$,

$$u_n = \sum_{p=1} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \leqslant \sum_{p=1} \frac{\ln n}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Pour $n \geqslant 2$, $\ln n > 0$ d'où $\boxed{\dfrac{u_n}{\ln n} + \dfrac{\ln n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$

Comme u_n converge, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} + \frac{\ln n}{2} = +\infty$. Par minoration,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = +\infty$$

En conclusion, $\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{1}{n} \text{ diverge.}}$

On retrouve le critère de Riemann pour $\alpha = 1$.

4) Soit $f(t) = \dfrac{1}{t}$, définie sur $[1, +\infty[$. La fonction f est positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

a) D'après Préliminaire 2, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=1}^{n} f(p) = 1 + \sum_{p=2}^{n} f(p) \leqslant 1 + \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \ln(n)$$

Pour $n = 1$, l'encadrement s'écrit $\ln 2 \leqslant 1 \leqslant 1$ qui reste vrai. Ainsi, Pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\boxed{\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n}$$

b) Soit $n \geqslant 1$. Notons $\gamma_n = H_n - \ln n$.

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Appliquons de nouveau à f le résultat obtenu en Préliminaire 1), partie droite de l'inégalité pour $k = n+1 \geqslant n_0 + 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Donc $\gamma_{n+1} - \gamma_n \leqslant 0$ et la suite est décroissante.

De plus, d'après 3.a, $\gamma_n = H_n - \ln n \geqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$. Ainsi la suite (γ_n) est décroissante minorée, donc convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (H_n - \ln n) \text{ converge}}$$

On note généralement γ sa limite, plutôt que ℓ. Cf exercice 4 feuille séries numériques.

c) D'après la question précédente,

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\Big) = -\frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Finalement, $\boxed{(\gamma_{n+1} - \gamma_n) \sim -\dfrac{1}{2n^2}}$

D'après le critère de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ est absolument convergente donc convergente.

De plus, la série $\sum(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} (\gamma_{k+1} - \gamma_k) = \gamma_{n+1} - \gamma_1$$

Ainsi la suite (γ_n), qui est égale à la suite des sommes partielles (à γ_1 près), est convergente.

d) Soit $N \geqslant 2$. On reconnaît encore une série télescopique *(On vous demande de calculer la limite d'une série : soit c'est usuel, soit c'est télescopique...)*

$$\sum_{n=2}^{N} \Big(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\Big) = -1 + H_N - \sum_{n=2}^{N}(\ln(n) - \ln(n-1)) = -1 + H_N - \ln N + \ln 1 = \gamma_N - 1$$

Donc la série converge et, en passant à la limite $N \to +\infty$,

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\Big) = \ell - 1}$$

e) D'après le calcul fait à la question précédente, pour $n \geqslant 2$,

$$U_n = \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) = -\gamma_n + 1$$

Ainsi $U = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \Big(\ln\dfrac{k}{k-1} - \dfrac{1}{k}\Big) = -\ell + 1 = U_n + R_n = -\gamma_n + 1 + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\ln\dfrac{k}{k-1} - \dfrac{1}{k}\Big)$ puis

$$\boxed{\gamma_n - \ell = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\Big)}$$

Comme $\gamma_1 = 1$, l'égalité reste vraie pour $n = 1$.

f) Un développement limité de $\ln(1-u)$ en 0 nous donne, pour $k \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} &= -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}(1+o(1)) \\
&= \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&= \frac{1}{k^2}o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{k\to+\infty} k^2\left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right) = 0$. Soit ε un réel strictement positif. Par définition de la limite, il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier $k \geqslant n_0$: $\left|k^2\left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right)\right| \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire

$$\boxed{\left|\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2}}$$

g) Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann), par majoration, la série $\sum\left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right)$ est absolument convergente donc convergente. De plus, en sommant les inégalités et en passant à la limite, il vient : Pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left|\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right| \leqslant \varepsilon\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

h)
- La série $\sum\left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$ converge (3.d) et son reste est égal à $H_n - \ln n - \ell$ (3.e).
- La série $\sum \frac{1}{2(k(k-1)}$ est convergente ($\frac{1}{2k(k-1)} \sim \frac{1}{2k^2}$ et Riemann [1]) et télescopique :

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Donc pour $N \geqslant n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=n+1}^{N}\frac{1}{2k(k-1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2N}$ et en passant à la limite le reste est $\frac{1}{2n}$.

Finalement, en sommant les deux résultats,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k(k-1)}\right) = H_n - \ln n - \ell - \frac{1}{2n}$$

En appliquant l'inégalité obtenue en prélim.2, pour $f(t) = \frac{1}{t^2}$, on trouve $\sum\limits_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

L'intégrale et la série convergeant (Riemann), on peut passer à la limite pour $N \to +\infty$ et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$$

Donc 3.g s'écrit,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right)\right| = \left|H_n - \ln n - \ell - \frac{1}{2n}\right| \leqslant \varepsilon\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$$

Donc par définition du petit o, $\boxed{H_n = \ln n + \ell + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

1. Ou comme combinaison linéaire de séries convergentes, en utilisant 3.g

Partie 2

1) $h > 0$ donc, par croissance comparée, $\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} = 0}$

2) D'après 1), $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} = 0$, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_0 \in]1, +\infty[\ / \ \forall t \geqslant t_0 \quad \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} < \varepsilon$$

De plus, dès que $t > 1$, $\frac{1}{t^h(\ln t)^\beta}$ est bien défini et strictement positif.

Ainsi, en choisissant $\varepsilon = 1$, $\boxed{\text{il existe un réel } t_0 \text{ tel que, pour } t \geqslant t_0,\ 0 < \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} < 1.}$

3) Soit t_0 comme au 2). Soit $t \geqslant t_0$ quelconque. Alors, t^{1+h} est bien défini et strictement positif. Ainsi, d'après 2),

$$0 < \frac{1}{t^{1+h}} \times \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}}$$

Conclusion : $\boxed{\forall t \geqslant t_0 \quad 0 < \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}}.}$

4) D'après le critère de Riemann, l'intégrale de $\frac{1}{t^{1+h}}$ converge au voisinage de $+\infty$ $(1 + h > 1)$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sur $[t_0, +\infty[$.

Donc, d'après c), par majoration, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_{t_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \text{ est convergente.}}$

5) Soit $\alpha > 1$. La fonction f de la question précédente vérifie sur $[2, +\infty[$ les hypothèses du préliminaire ; en particulier, f est décroissante car c'est l'inverse d'une fonction positive croissante.

$\boxed{\text{Donc, l'intégrale généralisée } \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t \text{ convergeant, il en est de même de la série } \sum_{n\geqslant x2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}.}$

Partie 3

1) $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(1)$ donc $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. De même $\ln(n+2) \sim \ln n$. Ainsi,

$$\frac{\left(\ln(n+1)\right)^2}{\ln n \ln(n+2)} \sim \frac{(\ln n)^2}{\ln n \ln n} = 1$$

Donc $\frac{\left(\ln(n+1)\right)^2}{\ln n \ln(n+2)} = 1 + o(1)$, puis $v_n = 1 - 1 + o(1) = o(1)$ donc

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\geqslant 2} \text{ est convergente de limite } 0.}$$

2) Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $\ln(n+2) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$. Par conséquent,

$$v_n = 1 - \frac{\left(\ln(n+1)\right)^2}{\ln n \ln(n+2)} = 1 - \frac{(\ln n)^2\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2}{(\ln n)^2\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln n}\right)} = \boxed{1 - \frac{\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2}{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln n}}}$$

3) Effectuons un développement asymptotique de $v_n = 1 - \dfrac{a_n}{b_n}$:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{2n^2\ln n} + \frac{1}{3n^3\ln n} + o\Big(\frac{1}{n^3\ln n}\Big)\right)^2 = 1 + \frac{2}{n\ln n} + \frac{1}{n^2\ln n} + \frac{1}{n^2(\ln n)^2} + o\Big(\frac{1}{n^2(\ln n)^2}\Big)$$
$$b_n^{-1} = \left(1 + \frac{2}{n\ln n} + \frac{2}{n^2\ln n} + \frac{8}{3n^3\ln n} + +o\Big(\frac{1}{n^3\ln n}\Big)\right)^{-1} = 1 - \left[\frac{2}{n\ln n} + \frac{2}{n^2\ln n}\right] + \frac{4}{n^2(\ln n)^2} + o\Big(\frac{1}{n^2(\ln n)^2}\Big)$$

Donc $v_n = 1 - a_n b_n^{-1} = \dfrac{-2^2+1+4}{n^2(\ln n)^2} - \dfrac{1}{n^2\ln n} + o\Big(\dfrac{1}{n^2(\ln n)^2}\Big) = \boxed{-\dfrac{1}{n^2\ln n} + \dfrac{1}{n^2(\ln n)^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2(\ln n)^2}\Big)}$

(Ouf ! Le $o\Big(\frac{1}{n^3\ln n}\Big)$ est nécessaire pour avoir du $o\Big(\frac{1}{n^2(\ln n)^2}\Big)$ ensuite, qui sinon se ferait manger par $o\Big(\frac{1}{n^2(\ln n)}\Big)$.)

Ainsi, $\left|v_n + \dfrac{1}{n^2\ln n}\right| = \dfrac{|1+\varepsilon_n|}{n^2(\ln n)^2}$ où $(\varepsilon_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc est bornée. Soit $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $|1+\varepsilon_n| \leqslant b$.
Avec $\boxed{a=-1}$, il vient

$$\boxed{\left|v_n - \frac{a}{n^2\ln n}\right| \leqslant \frac{b}{n^2(\ln n)^2}}$$

4) Soit $w_n = \dfrac{1}{n^2(\ln n)}$. Comme $n^2 w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par définition de la limite, à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$w_n = |w_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$) donc $\boxed{\sum w_n \text{ converge}}$

D'après 3, $v_n \sim w_n$, donc $\boxed{\sum v_n \text{ converge}}$

Exercice 2 (EDHEC 2012, ECE — UPS)

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$
On note P pour pile et F pour face
$\mathrm{P}(P) = p$ et $\mathrm{P}(F) = q$
On lance cette pièce et on s'arrête dans les conditions suivantes :

- Soit si l'on a obtenu « Pile ».
- Soit on a obtenu n fois « Face ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de « Pile » obtenus et enfin Y_n le nombre de « Face » obtenus.

1) Loi de T_n

a) Pour $k=1$, $(T_n = 1)$ signifie que l'on n'a fait qu'un seul lancer, donc $(T_n = 1) = P_1$ puis $P(T_n = 1) = p$.
Et pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, $(T_n = k)$ signifie que l'on a fait k lancer, donc que l'on a eu le premier pile au $k^{ième}$ et donc des face avant.

$$(T_n = k) = F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$$

Donc, par indépendance mutuelles des lancers,

$$\mathrm{P}(T_n = k) = \mathrm{P}(F_1)\dots\mathrm{P}(F_{k-1})\,\mathrm{P}(P_k)$$

Donc $\mathrm{P}(T_n = k) = q^{k-1}p$ formule encore valable pour $k=1$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_n = k) = q^{k-1}p \text{ pour } k \in [[1, n-1]]}$

b) $(T = n)$ signifie que l'on a effectué n lancers, c'est à dire que l'on n'a pas eu de « Pile » jusqu'au précédent. Les lancer se terminant de toute façon au $n^{ième}$ si l'on n'a que de « Face »
Donc
$$(T_n = n) = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}\left(T_n = n\right) = q^{n-1}}$

c) Dans la somme, il faut isoler la valeur $k = n$ qui n'a pas la même formule que les autres :
$$\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = q^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}p = q^{n-1} + p\frac{1-q^{n-1}}{1-q} = q^{n-1} + 1 - q^{n-1} = 1$$

d) T_n étant finie, elle a une espérance et
$$E\left(T_n\right) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{P}\left(T_n = k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p + nq^{n-1}$$

On reconnaît une série géométrique – tronquée – dérivée :
$$\sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \dots$$

Ou bien, vu qu'on nous donne la formule (qui ne contient que du q), on remplace $p = 1 - q$:
$$\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}(1-q) = \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} kq^k = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)q^k - \sum_{k=1}^{n-1} kq^k = -(n-1)q^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} q^k$$

D'où
$$E(T_n) = nq^{n-1} - (n-1)q^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2 : E\left(T_n\right) = \dfrac{1-q^n}{1-q}}$

2) Loi de X_n.

a) et b) Lors des lancer, on a ou bien un Pile et on s'arrête, ou bien n face. Donc $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$: X_n suit une loi de Bernoulli. De plus $(X_n = 0) =$ « n faces » et $\mathrm{P}\left(X_n = 0\right) = q^n$.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1-q^n\right) \\ E\left(X_n\right) = 1 - q^n \end{array}}$

3) Loi de Y_n

a) Pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $(Y_n = k)$ signifie que l'on a eu k Face (donc pas n) et donc ensuite un Pile.
$$(Y_n = k) = F_1 \cap \cdots F_k \cap P_{k+1} \text{ donc } \mathrm{P}\left(Y_n = k\right) = q^k p$$

b) $(Y_n = n)$ signifie que l'on a eu n Face donc $\mathrm{P}\left(Y_n = n\right) = q^n$

c) Le nombre total de lancer est le nombre total de Pile et de Face obtenus.
Conclusion : $\boxed{T_n = X_n + Y_n}$
donc $Y_n = T_n - X_n$ et, par linéarité de l'espérance,
$$E\left(Y_n\right) = E\left(T_n\right) - E\left(X_n\right) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) = (1-q^n)\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = \frac{q(1-q^n)}{1-q}$$