Épreuve de Mathématiques 8.1

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (PT C 2011)

Préliminaire

Soit n_0 un entier naturel non nul, et f une fonction à valeurs positives, décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel $k \geq n_0 + 1$:

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$$

(on accompagnera la réponse d'une illustration graphique)

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq n_0 + 1$:

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$$

c. Comparer la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq n_0} f(n)\right)$ et de l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$.

I. Première partie

1. On rappelle que e désigne la base du logarithme népérien ($\ln e = 1$).

Pour $t \geq e$, on considère la fonction f définie par : $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$.

a. Après avoir justifié la dérivabilité de f sur $[e, +\infty[$, donner la valeur de $f'(t)$.

b. Etudier les variations de f sur $[e, +\infty[$.

c. Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[e, +\infty[$.

d. Déterminer une primitive de f sur $[e, +\infty[$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$?

e. Que peut-on déduire du *d.* pour la convergence de la série $\displaystyle\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$?

2. Pour $t \geq e$, on considère la fonction g définie par : $g(t) = \dfrac{1}{t^2(\ln t)^2}$.

a. Après avoir justifié la dérivabilité de g sur $[e, +\infty[$, donner la valeur de $g'(t)$.

b. Etudier les variations de g sur $[e, +\infty[$

c. Donner l'allure de la courbe représentative de g sur $[e, +\infty[$.

d. L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} g(t)\,dt$ est-elle convergente ?

e. Que peut-on déduire du *d.* pour la convergence de la série $\displaystyle\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2(\ln n)^2}\right)$?

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

a. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt$.

b. On admet, dans ce qui suit, que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$

Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.

c. Montrer que, pour, tout entier $n \geq 1$: $u_n \geq \dfrac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}$.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

e. Montrer que, pour, tout entier $n \geq 1$: $\dfrac{u_n}{\ln n} + \dfrac{\ln n}{2} \leq \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p}$, et conclure sur la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$.

4. On considère la suite $(H_n)_{n \geq 1}$, définie par : $H_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p}$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.

b. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n \geq 1}$ converge (on pourra étudier ses variations).

On notera ℓ sa limite.

c. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\gamma_n = H_n - \ln n$.

Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \right)$?

Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat du *b*.

d. Montrer que : $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \ln \dfrac{n}{n-1} \right) = \ell - 1$.

e. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $\gamma_n - \ell = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \dfrac{k}{k-1} - \dfrac{1}{k} \right)$.

f. Soit ε un réel strictement positif.

Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier $k \geq n_0$:

$$\left| \ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{k^2}.$$

g. Montrer que, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

h. Déterminer : $\lim_{n \to +\infty} \left(H_n - \ln n - \ell - \dfrac{1}{2n} \right)$.

II. Deuxième partie

Soient h et β deux réels, avec $h > 0$.

1. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{t^h (\ln t)^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

2. Montrer qu'il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geq t_0$: $0 < \dfrac{1}{t^h (\ln t)^\beta} < 1$.

3. On pose, dans ce qui suit : $\alpha = 1 + 2h$. Déduire du 2. que, pour $t \geq t_0$:

$$0 < \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}} .$$

4. L'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est-elle convergente ?

5. Que peut-on en déduire pour la nature de la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right)$?

III. Troisième partie

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ définie par : $v_n = 1 - \dfrac{[\ln (n+1)]^2}{\ln n \ln (n+2)}$.

a. La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

b. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = 1 - \dfrac{\left(1 + \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \right)^2}{1 + \dfrac{\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\ln n}}$,

c. Déterminer un réel a tel que, lorsque n tend vers $+\infty$: $\left| v_n - \dfrac{a}{n^2 \ln n} \right| \leq \dfrac{b}{n^2 (\ln n)^2}$.

où b est un réel positif que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Que peut-on en déduire pour la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 2} v_n \right)$?

Les séries de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ sont appelées Séries de Bertrand (la série harmonique $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \right)$ est un cas particulier). Elles ont de nombreuses applications en mécanique statistique.

FIN DE L'EPREUVE

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :
• Soit si l'on a obtenu "Pile" .
• Soit si l'on a obtenu n fois "Face".
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au k^{e} lancer ».
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus.
On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1) Loi de T_n .

- **a)** Pour tout k de $[\![1; n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $P(T_n = k)$.
- **b)** Déterminer $P\left(T_n = n\right)$.
- **c)** Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P\left(T_n = k\right) = 1$.
- **d)** Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E\left(T_n\right) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2) Loi de X_n .

- **a)** Donner la loi de X_n .
- **b)** Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

3) Loi de Y_n .

- **a)** Déterminer, pour tout k de $[\![0; n-1]\!]$, la probabilité $P(Y_n = k)$.
- **b)** Déterminer $P(Y_n = n)$.
- **c)** Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $E\left(Y_n\right)$.

4) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.