Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 13 mars 2015

Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère $\mathbb{R}^3$ orienté muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. On note $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$ le produit scalaire canonique.

1) Soit $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$$

2) Soit $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, notons $\mathscr{D} = A + \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$ la droite passant par A et de vecteur directeur *vectu*. Soit $M(x_M, y_M, z_M) \in \mathbb{R}^3$.
Le but de cette question est de déterminer la distance $d(M, \mathscr{D})$ du point M à la droite $\mathscr{D}$, et de montrer que

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

a) Soit $P \in \mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{PA} = \lambda\overrightarrow{u}$.
À l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\|\overrightarrow{PM}\|^2$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$.

b) Soit M' de paramètre λ_0 le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$. Rappeler le lien entre M' et $d(M, \mathscr{D})$.
En déduire, à l'aide de la question précédente, λ_0 puis $d(M, \mathscr{D})$.

c) En déduire que $d(M, \mathscr{D}) = \dfrac{\|\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u})\|}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$.

d) Comparer $\|\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u})\|$ et $\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|$.

e) En déduire que $d(M, \mathscr{D}) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$.

3) Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les droites d'équations respectives

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ 4z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points de l'espace équidistants des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

Exercice 2

Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les droites d'équations respectives

$$\begin{cases} y &= 0 \\ z &= -1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x &= 0 \\ z &= 1 \end{cases}$$

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on considère $M_1 \in \mathscr{D}_1$ d'abscisse $\cos t$ et $M_2 \in \mathscr{D}_2$ d'ordonnée $\sin t$. Montrer, en justifiant soigneusement, que

$$\begin{cases} x &= -\lambda \cos t \\ y &= (1+\lambda)\sin t \\ z &= 1+2\lambda \end{cases} \qquad \text{avec } (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$$

est un paramétrage de la surface Σ réunion des droites (M_1M_2) lorsque t varie. Nature de cette surface.

2) Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent en M de paramètres $(\lambda, t) = (1/2, 0)$.

3) Déterminer en fonction des paramètres t et λ les points réguliers de Σ, puis les points où le plan tangent à Σ est horizontal.

4) Déterminer une équation cartésienne de Σ.

5) Déterminer la nature des sections horizontales de Σ. On les décrira le plus complètement possible.

Exercice 3

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1) Soit $D = [-1,1] \times [-1,1]$, et ∂D le bord de D.

a) **i)** Représenter graphiquement D et ∂D.

ii) Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Justifier l'existence, sans calculs, d'un maximum global A et d'un minimum global a de la fonction f sur D.

b) Déterminer les éventuels extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$. Justifier votre réponse, en précisant au besoin si ce sont des maxima ou des minima.

c) Désormais on se place dans D.

i) On rappelle que A est le maximum de f sur D. Montrer que A ne peut être atteint que sur le bord de D.

ii) Déterminer la valeur de A et les points de ∂D sur lesquels f atteint cette valeur. On pourra découper le bord de D en quatre morceaux.

iii) Déterminer de même la valeur du minimum a et les points de ∂D sur lesquels f atteint cette valeur.

2) On considère $\mathbb{R}^2$ orienté muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit Γ la courbe d'équation cartésienne $f(x,y) = 0$.

a) Déterminer une symétrie laissant stable Γ.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_t$ la droite d'équation $y = tx$. Déterminer l'intersection $\mathscr{D}_t \cap \Gamma$.

c) Pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq -1$,

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

On note Φ la courbe de paramétrage $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Comparer Γ et Φ. On précisera si l'on a une inclusion ou une égalité.

d) Étudier la courbe paramétrée Φ : tableau de variations et étude d'éventuelles branches infinies.

e) Donner l'allure de Γ.

3) On considère $\mathbb{R}^3$ orienté muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On note ici

$$\Gamma = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y) = 0\} \qquad \Delta = \{(x,x,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$$

a) Que représente Γ vis à vis de la surface S.

b) Déterminer une symétrie laissant stable S.

c) Soit $M(x, y, 0)$. Déterminer le projeté orthogonal de M sur la droite Δ. En déduire la distance euclidienne de M à la droite Δ.

d) Soit de plus $N(X, Y, Z)$. Déterminer à quelles conditions N et M ont la même projection orthogonale sur Δ, et sont à la même distance euclidienne de $O = (0, 0, 0)$.

En déduire une équation cartésienne de la surface Σ décrite alors par ces points N lorsque M décrit Γ (on pourra calculer $(x+y)^3$ et $(x+y)^2$).

e) Déterminer une équation du plan tangent à S au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 = f(x_0, y_0)$. Dans quels cas ce plan est-il horizontal (d'équation de la forme $z = c$) ? Quelle est la position relative du plan tangent par rapport à S ?

Exercice 4

Soit $\mathscr{C}$ la conique d'équation cartésienne dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$:

$$y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + (4 - 3\sqrt{3})y + 6 - 6\sqrt{3} = 0$$

1) Déterminer une équation réduite de $\mathscr{C}$ dans un repère $(\Omega, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ dont on précisera les coordonnées de l'origine dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

2) Quelle isométrie du plan transforme $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ en $(\Omega, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$?

3) Préciser tous les éléments caractéristiques de $\mathscr{C}$ puis tracer $\mathscr{C}$;

FIN DE L'ÉPREUVE