Épreuve de Mathématiques 7

Correction

Exercice 1 (E3A MP B 2013)

1) a) Soit $u_n = \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$.

$$\forall x \neq 0, \qquad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^2(2n+1)}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert,
- si $x^2 < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente,
- si $x^2 > 1$, la série $\sum |u_n|$ diverge grossièrement donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi $\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière : } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \text{ est } R = 1}$

b) Comme $R = 1$, a priori $I =]-1, 1[$.
De plus, pour $x \in \{-1, 1\}$, $u_n = \dfrac{1}{2n+1} \sim \dfrac{1}{2n}$, qui est le terme général d'une série divergente d'après Riemann ($\alpha = 1$) : S n'est définie ni en 1 ni en -1.
Donc $\boxed{I =]-1, 1[}$

2) a) Une série entière est $\mathscr{C}^\infty$ et dérivable terme à terme à l'intérieur de son disque de convergence.
Donc la série entière $\boxed{x \mapsto xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ est dérivable sur } I}$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xS(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \boxed{\frac{1}{1-x^2}}$$

b) On décompose en éléments simples :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

Donc $\boxed{a = b = \frac{1}{2}}$

Or d'après 2)a), $\forall x \in]-1, 1[$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xS(x)) = \dfrac{1}{1-x^2}$
Donc, comme $1 - x > 0$ et $1 + x > 0$, et que $xS(x)$ s'annule en 0,

$$xS(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(-\ln(1-x) + \ln(1+x)\big)$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

3) **a)** Une série entière est continue à l'intérieur de son disque de convergence donc primitivable, de plus on peut intégrer terme à terme une série entière à l'intérieur de son disque de convergence. Si on note F la primitive de S s'annulant en 0,

$$\forall x \in]-1,1[\qquad F(x) = \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

De plus, en $x = 1$, $\dfrac{1}{(2n+1)^2} \sim \dfrac{1}{4n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).

Donc la fonction F se prolonge par continuité en $x = 1$ par $F(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \lim_{x\to 1} F(x)$.

Ainsi,

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \boxed{\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x}$$

Théorème : si le rayon de convergence de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est un nombre réel $R > 0$, et si de plus la série $\sum a_n x^n$ converge pour $x = R$, la fonction S est prolongeable par continuité en $x = R$ par $\lim_R S = S(R) = \sum a_n R^n$.

b) D'après la question précédente,

$$\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

De plus, d'après 2)b), pour tout $x \in]-1,1[$, $xS(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Donc

$$\forall x \in]0,1[\qquad S(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

En remplaçant S par son expression dans l'intégrale sur $]0,1[$ (impropre a priori) :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

On a déjà montré la convergence de cette intégrale au 3)a), lorsque l'on dit que $\lim_{x\to 1} F(x)$ existe.

Exercice 2 (Centrale 1 TSI 2010)

1) **a)** À l'intérieur de son disque de convergence $]-R,R[$, la série entière y est $\mathscr{C}^\infty$ et dérivable terme à terme. On dérive puis on remplace dans (E_a) : pour tout $x \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}
(x-a)y'' + 2y' &= (x-a)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} an(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a(n+1)na_{n+1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} \\
&= -2aa_2 + 2a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big[n(n-1)a_n - a(n+1)na_{n+1} + 2na_n\Big] x^{n-1}
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient donc

$$\begin{cases} & -2aa_2 + 2a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 2 & n(n-1)a_n - a(n+1)na_{n+1} + 2na_n = 0 \end{cases}$$

Après simplifications, on trouve la suite géométrique $\boxed{\forall n \geqslant 1\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a}}$, l'expression en fonction de n étant $\forall n \geqslant 1\ a_n = \frac{a_1}{a^{n-1}}$.

pour tout $x \in]-R, R[$, $y(x) = a_0 + a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n-1}} = a_0 - a_1 a + a_1 a \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n$.

On reconnaît la somme de la série géométrique :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad y(x) = a_0 - a_1 a + \frac{a_1 a}{1 - x/a}$$

On a donc nécessairement $|x/a| < 1$, donc $R \leqslant a$.

b) Les fonction $y(x) = a_0 - a_1 a + \frac{a_1 a}{1 - x/a}$ sont développables en série entière sur $]-a, a[$ (car $|x/a| < 1$), et solutions de (E_a) d'après la question précédentes.

c) L'ensemble de ces fonctions peut s'écrire $\mathscr{S}_{]-a,a[} = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$ avec, pour tout $x \in]-a, a[$, $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = -a + \frac{a}{1 - x/a}$.

C'est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $]-a, a[$. De plus la famille (f_1, f_2) est libre (f_2 n'est pas constante, donc pas colinéaire à f_1).

En conclusion, $\boxed{\mathscr{S}_{]-a,a[} \text{ est un espace vectoriel de dimension 2 de base } (f_1, f_2).}$

De plus, (E_a) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions continues, donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 sur chacun des intervalles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ où le coefficient devant y'' est non nul. Ainsi,

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_a) \text{ sur }]-a, a[\text{ est } \mathscr{S}_{]-a,a[}.}$

2) Les fonctions $f(x) = 1$ et $g(x) = \frac{1}{x-a}$ sont solutions de (E_a) (calcul de vérification), donc, de même qu'au a)iii) sur chacun des intervalles, $\mathscr{S}_{]-\infty,a[} = \operatorname{Vect}(f_{|]-\infty,a[}, g_{|]-\infty,a[})$ et $\mathscr{S}_{]a,+\infty[} = \operatorname{Vect}(f_{|]a,+\infty[}, g_{|]a,+\infty[})$.
Pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$, il reste à recoller ces solutions. Or g n'a pas de limite en a, donc les solutions seront forcément de la forme $\lambda_1 f$ sur $]-\infty, a[$ et $\lambda_2 f$ sur $]a, +\infty[$.
Pour que la fonction obtenue soit continue, il faut que $\lambda_1 = \lambda_2$, et dans ce cas on trouve une fonction constante, qui est bien $\mathscr{C}^2$.
Finalement, $\boxed{\text{Les solutions de } (E_a) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions constantes.}}$

Exercice 3 (TPC 2013)

Partie 1 (Préliminaires et cas où $\alpha > 1$)

1) D'après le critère de Riemann, $\boxed{\text{La série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\beta} \text{ converge si et seulement si } \beta > 1.}$

2) $\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge absolument si et seulement si la série } \sum |u_n| \text{ converge.}}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décalage des indices, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} - a_0$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$ existe et est finie si et seulement si il en est de même pour $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} - a_0$.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum (a_{n+1} - a_n) \text{ converge, si et seulement si la suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}}$

4) Pour tout $n \geqslant 1$, comme $|\sin| \leqslant 1$,

$$\left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

Or $\alpha > 1$ donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge (Critère de Riemann, question 1).

Donc par majoration, $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.

Ainsi : $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} \text{ est convergente.}}$

Partie 2 (Cas où $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$)

1) a) φ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$, donc on peut l'intégrer sur $[1, x]$ pour tout $x \geqslant 1$.

Sur $[1, x] \subset]0, +\infty[$, on peut effectuer le changement de variable proposé, qui est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

$y = \sqrt{t}$ donc $\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, et $\left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1 \\ t & = & x \end{array}\right.$ correspond à $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 1 \\ y & = & \sqrt{x} \end{array}\right.$. Donc

$$\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{2\sin(\pi\sqrt{t})}{2\sqrt{t}(\sqrt{t})^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}y$$

b) En effectuant une intégration par partie,

$$\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{-\cos(\pi y)}{\pi y^{2\alpha-1}}\right]_1^{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2\alpha-1}{\pi}\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\left(-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}^{2\alpha-1}} - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y}$$

c) *(On procède comme au 4) de la partie 1)*

Pour tout $n \geqslant 1$, comme $|\cos| \leqslant 1$,

$$\left|\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{y^{2\alpha}}$$

Or $\alpha > 1/2$ donc $2\alpha > 1$, par conséquent (Riemann), $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$ converge.

Donc, par majoration, $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

d) D'après ci-dessus, $\lim_{x\to+\infty} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$ existe (et vaut $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$).

De plus, pour tout $x \geqslant 1$,

$$\left|-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}^{2\alpha-1}}\right| = \frac{|\cos(\pi\sqrt{x})|}{\pi x^{\alpha-1/2}} \leqslant \frac{1}{\pi x^{\alpha-1/2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Donc en conclusion :

$$\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\Big(\underbrace{-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}^{2\alpha-1}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} - \frac{1}{\pi}\Big) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\underbrace{\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y}_{\text{converge}}$$

$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

2) Étude de la dérivée de la fonction φ.

a) La fonction $t \mapsto t^\alpha$ est $\mathscr{C}^1$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ de même.
Donc comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$, $\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [1, +\infty[.}$

$$\forall t \in [1, +\infty[\qquad \varphi'(t) = \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{t}}\cos(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha} - \frac{\alpha \sin(\pi\sqrt{t})}{t^{\alpha+1}} = \boxed{\frac{\frac{\pi}{2}\cos(\pi\sqrt{t}) - \alpha\frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{\sqrt{t}}}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}}$$

b) **i)** Comme, pour $u \geqslant 1$, $\left|\dfrac{\sin(\pi u)}{u}\right| \leqslant \dfrac{1}{u} \leqslant 1$, il vient $\boxed{\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\sin(\pi u)}{u} = 0}$ et

$\boxed{\text{La fonction } u \mapsto \dfrac{\sin(\pi u)}{u} \text{ est bornée (par 1) sur } [1, +\infty[.}$

ii) D'après 2(b)i ci-dessus, pour $u = \sqrt{t}$, $\left|\dfrac{\sin(\pi\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right| \leqslant 1$. De plus $|\cos| \leqslant 1$. Donc

$$\boxed{\forall t \in [1, +\infty[, \qquad |\varphi'(t)| \leqslant \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}}$$

c) La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ donc $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Le théorème des accroissements finis s'écrit :

$$\exists c \in]a, b[\qquad |\varphi(a) - \varphi(b)| \leqslant |\varphi'(c)|(b - a)$$

Or d'après ci-dessus $|\varphi'(c)| \leqslant \dfrac{K}{c^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. Comme $u \mapsto \dfrac{1}{u^\beta}$ est décroissante pour $\beta = \alpha + \dfrac{1}{2} > 0$,

$$|\varphi'(c)| \leqslant \frac{K}{c^{\alpha+\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

Finalement :

$$\boxed{|\varphi(a) - \varphi(b)| \leqslant \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}|a - b|}$$

3) Nature de la série $\sum v_n$.

a) D'après la relation de Chasles, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{V_N = \sum_{n=1}^{N} v_n = \int_1^{N+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t}$$

b) D'après 1)d), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_1^{N+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
Ainsi, $\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n\geqslant 1} v_n \text{ converge}}$

4) Nature de la série $\sum(u_n - v_n)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\varphi(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(n)\,\mathrm{d}t$,

$$\boxed{u_n - v_n = \int_n^{n+1} \left(\varphi(n) - \varphi(t)\right)\,\mathrm{d}t}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 4a, $|u_n - v_n| \leqslant \int_n^{n+1} |\varphi(n) - \varphi(t)|\,\mathrm{d}t$.

De plus, d'après 2c, pour tout $t > n$, $|\varphi(n) - \varphi(t)| \leqslant \dfrac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

Donc en majorant dans l'intégrale,

$$|u_n - v_n| \leqslant \int_n^{n+1} |\varphi(n) - \varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

Conclusion : $\boxed{|u_n - v_n| \leqslant \dfrac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}}$

c) Comme $\alpha > \dfrac{1}{2}$, $\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$ donc d'après Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ converge.

Donc par majoration, d'après 4)b), $\sum (u_n - v_n)$ converge absolument.

Ainsi, $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} (u_n - v_n) \text{ converge}}$

5) D'après 4)c) $\sum (u_n - v_n)$ converge, et d'après 3)b) $\sum v_n$ converge.

Donc, comme somme de série convergente, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

Partie 3 (Cas $\alpha = \frac{1}{2}$)

1) a) • $\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + o(u^2)$.

• $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

b) En factorisant partout : $\delta_n = e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}} = e^{i\pi\sqrt{n}} \left(e^{i\pi\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)} - 1 \right)$

Or $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - 1 = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{8n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, donc

$$\begin{aligned}
\delta_n &= e^{i\pi\sqrt{n}} \left(e^{i\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)} - 1 \right) \\
&= e^{i\pi\sqrt{n}} \left(i\pi\Big(\frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)\Big) - \frac{\pi^2}{2}\Big(\frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)\Big)^2 - \frac{i\pi^3}{3}\Big(\frac{1}{2\sqrt{n}}\Big)^3 \right) \\
&= e^{i\pi\sqrt{n}} \left(\frac{i\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{i\pi}{8n^{3/2}} - \frac{\pi^2}{8n} - \frac{i\pi^3/3}{8n^{3/2}} \right) + o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) \qquad \left(\text{car } \left|e^{i\pi\sqrt{n}}\right| = 1\right) \\
&= e^{i\pi\sqrt{n}} \left(\frac{i\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2}{8n} - \frac{i(\pi + \pi^3/3)}{8n^{3/2}} \right) + o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) \\
&= \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} - \frac{i\left(\pi + \frac{\pi^3}{3}\right)e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

ouf ! On remarque qu'il y avait une erreur d'énoncé (telle qu'elle dans le sujet).

c) Comme $ie^{i\theta} = i\cos(\theta) - \sin(\theta)$, en passant aux parties réelles il vient

$$\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) = \frac{-\pi\sin(\pi\sqrt{n})}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2\cos(\pi\sqrt{n})}{8n} + \frac{\left(\pi + \frac{\pi^3}{3}\right)\sin(\pi\sqrt{n})}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

En conclusion (là aussi l'erreur d'énoncé se répercutait) :

$$\boxed{\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi}\left(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})\right) - \frac{\pi}{4n}\cos(\pi\sqrt{n}) + \left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right)\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}$$

2) **a)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{|\sin(\pi\sqrt{n})|}{n^{3/2}} \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$ qui est le terme général d'une série convergente (Riemann, $3/2 > 1$), donc, par majoration, $\boxed{\text{La série } \sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{3/2}} \text{ converge absolument donc converge.}}$

Par définition du petit o, $\lim\limits_{n\to 0} n^{3/2} w_n = 0$ donc par définition de la limite, (pour $\varepsilon = 1$)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad |n^{3/2} w_n| \leqslant 1$$

Ainsi, à partir d'un certain rang n_0, $|w_n| \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

Donc, par majoration, $\boxed{\text{La série } \sum w_n \text{ converge absolument donc converge.}}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\beta_n = \cos(2n\pi) = 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma_n = \cos((2n+1)\pi) = 1}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = -1$.

Or si (α_n) converge vers une limite ℓ, toutes les suites extraites de (α_n) convergent vers ℓ.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\cos(\pi\sqrt{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est divergente}}$

c) Si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ convergeait, alors $(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}))_n$ serait une combinaison linéaire de séries convergentes, et donc une série convergente.

Donc en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})) = 0$. Or

(α_n) ci-dessus Or $\sum \alpha_n$ diverge.

Donc, par l'absurde, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ est une série divergente.}}$

Partie 4 (Cas $\alpha < \dfrac{1}{2}$)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{\sin(\pi\sqrt{p})}{p^\alpha} - \sum\limits_{p=1}^{n-1} \dfrac{\sin(\pi\sqrt{p})}{p^\alpha} = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \boxed{n^{\alpha-1/2}(S_n - S_{n-1}) = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}}$$

En sommant cette égalité pour $1 \leqslant n \leqslant N$, on obtient presque une série télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{N} n^{\alpha-1/2}(S_n - S_{n-1}) \\
&= \sum_{n=1}^{N} n^{\alpha-1/2} S_n - \sum_{n=1}^{N-1} (n+1)^{\alpha-1/2} S_n \qquad \text{(Car } S_0 = 0\text{, somme vide)} \\
&= N^{\alpha-1/2} S_N + \sum_{n=1}^{N-1} \left(n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}\right) S_n \\
\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} &= \boxed{\sum_{n=1}^{N} S_n \left(n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}\right) + S_N (N+1)^{\alpha-1/2}}
\end{aligned}$$

2) **a)** Par hypothèse, la série $\sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge, donc la suite (S_n) de ses sommes partielle est bornée, en tant que suite convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{Il existe } M > 0\text{, tel que pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ |S_n| \leqslant M.}$

b) Remarquons, au préalable, que $n^{\alpha-1/2} > (n+1)^{\alpha-1/2}$ (car $\alpha < \dfrac{1}{2}$ dans cette partie).

Ainsi, d'après ci-dessus, $\left|S_n\left(n^{\alpha-1/2}-(n+1)^{\alpha-1/2}\right)\right| \leqslant M\left(n^{\alpha-1/2}-(n+1)^{\alpha-1/2}\right)$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^{\alpha-1/2}-(n+1)^{\alpha-1/2} = 1-(N+1)^{\alpha-1/2}$ (série télescopique) converge ($\alpha - 1/2 < 0$).

Donc, par majoration, $\boxed{\text{La série } \sum S_n\left(n^{\alpha-1/2}-(n+1)^{\alpha-1/2}\right) \text{ converge absolument donc converge.}}$

c) (S_N) est convergente par hypothèse et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(N+1)^{\alpha-1/2} = 0$ (car $\alpha - 1/2 < 0$), donc le produit converge vers 0 :

$\boxed{\text{La suite } \left(S_N(N+1)^{\alpha-1/2}\right)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0}$

3) D'après 1), la suite $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ des sommes partielle est la somme d'une série convergente (2)b)) et d'une suite convergente (2)c)), donc converge.

Ainsi, $\boxed{\text{La série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ est convergente.}}$

4) D'après le résultat de la question 2)c) de la partie 3, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Donc c'est absurde : l'hypothèse faite en début de partie 4 est fausse.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{\alpha}} \text{ diverge}}$

FIN DE L'ÉPREUVE