# Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

---

**L'usage des calculatrices est interdit.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

## Exercice 1

**1)** **a)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière réelle : $\sum \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$.

**b)** On note $S(x)$ sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$. Préciser son ensemble de définition $I$.

**2)** **a)** Démontrer que la fonction $x \mapsto xS(x)$ est dérivable sur $I$ et donner une expression simple de sa dérivée.

**b)** Déterminer deux nombres réels $a$ et $b$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$, en déduire que

$$\forall x \in I,\ xS(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

**3)** **a)** Montrer, en énonçant le théorème du cours utilisé, que l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$ est intégrable sur $]0,1[$ et que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x.$$

**b)** En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \mathrm{d}x$ est convergente et que

$$\int_0^1 \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

## Exercice 2

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, on considère

$$(E_a) \qquad (x-a)y'' + 2y' = 0$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable $x$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle réel et à valeur réelle.

**1)** On suppose $a > 0$. On considère une suite réelle $(a_n)$ et on définit une fonction $y$ comme la somme de la série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in ]-R, R[$ (avec $R > 0$).

**a)** On suppose que $y$ est solution de $(E_a)$. Déterminer, pour tout $x \in ]-R, R[$, une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)$, puis déterminer $a_n$ en fonction de $n$ et de $a_1$, pour tout $n \geqslant 1$. Exprimer $y$ à l'aide de fonctions usuelles.

**b)** En déduire les fonctions développables en série entière qui sont solutions de $(E_a)$ sur $]-a, a[$.

**c)** Montrer qu'elles forment un espace vectoriel de dimension 2 et en donner une base. En déduire l'ensemble des solutions de $(E_a)$ sur $]-a,a[$.

**2)** On suppose que $a$ est un nombre réel quelconque. Résoudre $(E_a)$ sur $]-\infty,a[$, puis sur $]a,+\infty[$ et enfin sur $\mathbb{R}$.

# Exercice 3

Le but de ce problème est de déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ suivant la valeur du réel $\alpha$.

## Partie 1 (Préliminaires et cas où $\alpha > 1$)

**1)** Rappeler à quelle condition sur $\beta\in\mathbb{R}$ la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\beta}$ est convergente.

**2)** Rappeler la définition de la convergence absolue d'une série $\sum u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes réels.

**3)** Montrer que la série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge, si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**4)** On suppose dans cette question que $\alpha > 1$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est convergente.

## Partie 2 (Cas où $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$)

On suppose, dans cette partie, que $\alpha$ appartient à $]\frac{1}{2},1]$.

On définit la fonction $\varphi$ sur $[1,+\infty[$ en posant $\varphi(t)=\dfrac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$.

On pose $u_n=\varphi(n)=\dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et $v_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\varphi(t)dt$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

**1)** Nature de l'intégrale impropre (ou généralisée) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)dt$.

**a)** En effectuant le changement de variable $y=\sqrt{t}$, montrer que pour tout $x>1$ :

$$\int_1^x\varphi(t)dt = 2\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}dy$$

**b)** En déduire que

$$\int_1^x\varphi(t)dt = 2\left(-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}^{2\alpha-1}}-\frac{1}{\pi}\right)-\frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}dy$$

**c)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}dy$ est convergente.

**d)** En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)dt$ est convergente.

**2)** Étude de la dérivée de la fonction $\varphi$.

**a)** Montrer que la fonction $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $[1,+\infty[$ et calculer sa dérivée $\varphi'(t)$ pour tout $t\in[1,+\infty[$.

**b)** **i)** Calculer, si elle existe, la limite de $u\mapsto\dfrac{\sin(\pi u)}{u}$ lorsque $u$ tend vers $+\infty$. Montrer que la fonction $u\mapsto\dfrac{\sin(\pi u)}{u}$ est bornée sur $[1,+\infty[$.

**ii)** En déduire qu'il existe un réel $K>0$ tel que

$$\forall t\in[1,+\infty[,\ |\varphi'(t)|\leqslant\frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

**c)** Montrer que pour tout $(a,b) \in [1,+\infty[^2$ vérifiant $a < b$, on a

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \leqslant \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}|a-b|$$

**3)** Nature de la série $\sum v_n$.

**a)** Exprimer la somme partielle $V_N = \sum_{n=1}^{N} v_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'une intégrale.

**b)** Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ ?

**4)** Nature de la série $\sum(u_n - v_n)$.

**a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = \int_n^{n+1} (\varphi(n) - \varphi(t))\,dt$

**b)** À l'aide de **II.2c** et **II.4a**, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - v_n| \leqslant \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

**c)** En déduire que $\sum_{n\geqslant 1}(u_n - v_n)$ converge.

**5)** Conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

## Partie 3 (Cas $\alpha = \frac{1}{2}$)

On suppose, dans cette partie, que $\alpha$ vaut $\frac{1}{2}$.

**1)** En vue du développement asymptotique de $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, on pose $\delta_n = e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$.

**a)** Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+u}$ et $e^u$.

**b)** Montrer que $\delta_n = \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} - \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ $(\mathcal{R})$.

**c)** En admettant qu'on puisse prendre les parties réelles dans $(\mathcal{R})$, en déduire que

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi}\Big(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})\Big) - \frac{\pi}{4n}\cos(\pi\sqrt{n}) + \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

**2)** **a)** Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{3/2}}$ ? Celle de $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ avec $w_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ ?

On admet que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ est convergente.

**b)** On pose $\alpha_n = \cos(\pi\sqrt{n})$. Expliciter les suites de termes généraux $\beta_n = \alpha_{(2n)^2}$ et $\gamma_n = \alpha_{(2n+1)^2}$. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(\cos(\pi\sqrt{n})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente .

**c)** Que peut-on en déduire sur la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ ?

## Partie 4 (Cas $\alpha < \frac{1}{2}$)

On suppose, dans cette partie, que le réel $\alpha$ est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

On va montrer, par l'absurde, que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge. On suppose donc que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$, et $S_0 = 0$.

**1)** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = n^{\alpha-1/2}(S_n - S_{n-1})$$

En déduire que pour tout entier $N$ supérieur ou égal à 2, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{N} S_n \left(n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}\right) + S_N(N+1)^{\alpha-1/2}$$

**2)** **a)** Montrer qu'il existe $M > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n| \leqslant M$.

**b)** En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} S_n \left(n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}\right)$ est convergente.

**c)** Montrer que la suite $\left(S_N(N+1)^{\alpha-1/2}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

**3)** Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ ?

**4)** Conclure sur la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

**FIN DE L'ÉPREUVE**