Épreuve de Mathématiques 7

Correction

Exercice 1 (Centrale TSI 2010 — partiel)

1) À l'intérieur de son disque de convergence $]-R,R[$, la série entière y est $\mathscr{C}^\infty$ et dérivable terme à terme. On dérive puis on remplace dans (E_a) : pour tout $x \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}
(x-a)y''+2y' &= (x-a)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} an(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a(n+1)na_{n+1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} \\
&= -2aa_2 + 2a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big[n(n-1)a_n - a(n+1)na_{n+1} + 2na_n\Big] x^{n-1}
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient donc

$$\begin{cases} & -2aa_2+2a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 2 & n(n-1)a_n - a(n+1)na_{n+1} + 2na_n = 0 \end{cases}$$

Après simplifications, on trouve la suite géométrique $\boxed{\forall n \geqslant 1 \ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a}}$, l'expression en fonction de n étant $\forall n \geqslant 1 \ a_n = \dfrac{a_1}{a^{n-1}}$.

pour tout $x \in]-R,R[$, $y(x) = a_0 + a_1 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n-1}} = a_0 - a_1 a + a_1 a \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n$.

On reconnaît la somme de la série géométrique :

$$\forall x \in]-R,R[\qquad y(x) = a_0 - a_1 a + \frac{a_1 a}{1-x/a}$$

On a donc nécessairement $|x/a|<1$, donc $R \leqslant a$.

2) Les fonction $y(x) = a_0 - a_1 a + \dfrac{a_1 a}{1-x/a}$ sont développables en série entière sur $]-a,a[$ (car $|x/a|<1$), et solutions de (E_a) d'après la question précédentes.

3) L'ensemble de ces fonctions peut s'écrire $\mathscr{S}_{]-a,a[} = \mathrm{Vect}\,(f_1,f_2)$ avec, pour tout $x \in]-a,a[$, $f_1(x)=1$ et $f_2(x) = -a + \dfrac{a}{1-x/a}$.

C'est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $]-a,a[$. De plus la famille (f_1,f_2) est libre (f_2 n'est pas constante, donc pas colinéaire à f_1).

En conclusion, $\boxed{\mathscr{S}_{]-a,a[} \text{ est un espace vectoriel de dimension 2 de base } (f_1,f_2).}$

De plus, (E_a) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions continues, donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 sur chacun des intervalles $]-\infty,a[$ et $]a,+\infty[$ où le coefficient devant y'' est non nul.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_a) \text{ sur }]-a,a[\text{ est } \mathscr{S}_{]-a,a[}.}$

Exercice 2 (PT C 2011)

Préliminaires *(toute cette partie est une question de cours...)*

1) Soit k entier naturel tel que $k \geqslant n_0+1$. f étant décroissante, $\begin{cases} \forall t \in [k, k+1] & f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k) \\ \forall t \in [k-1, k] & f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1) \end{cases}$.

D'où :

$$\boxed{\int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\ \mathrm{d}t = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ \mathrm{d}t}$$

2) Soit $n \geqslant n_0+1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0+1,\ \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{n_0}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t}$$

On remarque (et il est nécessaire de le remarquer, pour la question 1.2.c) que l'inégalité de gauche peut être décalée de 1 : $\forall n \geqslant n_0 \quad \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$

3) Rappelons des résultats du cours :
La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ est une série positive. Elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles définies par :

$$\forall n \geqslant n_0,\ U_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

est majorée et dans ce cas la somme de la série est : $U = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} U_n$.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ de la fonction positive f est convergente si et seulement si la fonction F définie par :

$$\forall x \geqslant n_0,\ F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

est majorée et dans ce cas : $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} F(x)$.

On va montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

- Supposons que l'intégrale généralisée converge. Comme dans ce cas : $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \sup_{x \geqslant n_0} F(x)$, la deuxième inégalité du b donne :

$$\forall n \geqslant n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) + f(n_0) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t + f(n_0)$$

  La série positive converge puisque la suite de ses sommes partielles est majorée.
- Supposons que la série converge. La première inégalité du b donne alors pour tout $n \geqslant n_0+1$: $\displaystyle\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$. D'où :

$$\forall n \geqslant n_0+1,\ F(n+1) = \int_{n_0}^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\ \mathrm{d}t + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

Quel que soit $x \geqslant n_0$, soit $[x]$ la partie entière de x définie comme l'entier vérifiant $[x] \leqslant x < [x]+1$. Alors , comme F est croissante, car f est positive :

$$\forall x \geqslant n_0,\ F(x) \leqslant F([x]+1) \leqslant \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

Et, comme F est majorée, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On a bien montré la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et en cas de convergence, en passant à la limite pour $n \to +\infty$ dans l' inégalité du 2 :

$$\boxed{\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Partie 1

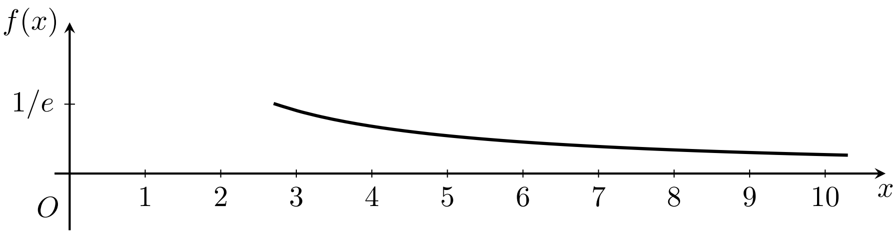
1) **a)** La fonction f définie sur $[e,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ est C^∞ sur $[e,+\infty[$, car quotient de fonctions C^∞ sur $[e,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas.

$$\forall t \geqslant e, \qquad \boxed{f'(t) = -\frac{\ln(t)+2}{t^2(\ln t)^3}}$$

b) Pour $t \geqslant e$, $\ln t \geqslant 1 > 0$ donc

x	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$1/e$ $\searrow$	0

c)



d) La fonction f est de la forme $u'u^{-2}$ avec $u = \ln$, donc

$$\forall x \geqslant e, \qquad \boxed{F(t) = -\frac{1}{\ln t}}$$

est une primitive de f sur $[e,+\infty[$.

$\displaystyle\int_e^A \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = [F(t)]_e^A = -\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1$, ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} \text{ converge.}}$$

e) La convergence de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$ entraîne la convergence de $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$.

La fonction f est continue, positive et décroissante sur $[3,+\infty[$. Ainsi, d'après le 3) des préliminaires, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$ entraîne celle de la série $\displaystyle\left(\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$, donc celle de la série $\displaystyle\left(\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$:

$$\boxed{\text{La série } \left(\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right) \text{ converge.}}$$

2) Posons $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$ et $F(t) = \dfrac{1}{2}(\ln t)^2$ une primitive de f, définies sur $[1, +\infty[$. Donc

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} f(p) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

(C'est l'exercice 4 de la feuille sur les séries numériques : aviez-vous su le faire en cours ?)

a) Soit $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_n^{n+1} = \boxed{\frac{1}{2}\Big(\ln(n+1)^2 - \ln(n)^2\Big)}$

b) Soit $n \geqslant e$. $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Or f est continue, positive, décroissante sur $[e, +\infty[$, donc d'après la partie droite de l'encadrement obtenue en Préliminaire.1), $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante.}}$

c) Soit $n_0 = 3$ et $n \geqslant 3$.

D'après la remarque faite au Préliminaire, question 2, $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$. Par conséquent,

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} f(p) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\sum_{p=1}^{2} f(p) - \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t}_{=\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}(\ln 3)^2} + \underbrace{\sum_{p=n_0}^{n} f(p) - \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} + \int_n^{n+1} \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, pour $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}$. La décroissance de (u_n) (question 2.b) nous permet de conclure que $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n \geqslant \dfrac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}}$

d) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante (question 2.b.) et minorée (question 2.c.) donc $\boxed{\text{Convergente}}$

e) Soit $n \geqslant 2$. La fonction ln est croissante donc pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\ln p \leqslant \ln n$. Comme $\dfrac{1}{p} \geqslant 0$,

$$u_n = \sum_{p=1} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \leqslant \sum_{p=1} \frac{\ln n}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Pour $n \geqslant 2$, $\ln n > 0$ d'où $\boxed{\dfrac{u_n}{\ln n} + \dfrac{\ln n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$

Comme u_n converge, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} + \frac{\ln n}{2} = +\infty$. Par minoration,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = +\infty$$

En conclusion, $\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{1}{n} \text{ diverge.}}$

On retrouve le critère de Riemann pour $\alpha = 1$.

3) Soit $f(t) = \dfrac{1}{t}$, définie sur $[1, +\infty[$. La fonction f est positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

a) D'après Préliminaire 2, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=1}^{n} f(p) = 1 + \sum_{p=2}^{n} f(p) \leqslant 1 + \int_2^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \ln(n)$$

Pour $n = 1$, l'encadrement s'écrit $\ln 2 \leqslant 1 \leqslant 1$ qui reste vrai. Ainsi, Pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\boxed{\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n}$$

b) Soit $n \geqslant 1$. Notons $\gamma_n = H_n - \ln n$.

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Appliquons de nouveau à f le résultat obtenu en Préliminaire 1), partie droite de l'inégalité pour $k = n+1 \geqslant n_0 + 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Donc $\gamma_{n+1} - \gamma_n \leqslant 0$ et la suite est décroissante.

De plus, d'après 3.a, $\gamma_n = H_n - \ln n \geqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$. Ainsi la suite (γ_n) est décroissante minorée, donc convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (H_n - \ln n) \text{ converge}}$$

On note généralement γ sa limite, plutôt que ℓ. Cf exercice 4 feuille séries numériques.

c) D'après la question précédente,

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\Big) = -\frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Finalement, $\boxed{(\gamma_{n+1} - \gamma_n) \sim -\frac{1}{2n^2}}$

D'après le critère de Riemann, la série $\sum_{n \geqslant 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ est absolument convergente donc convergente.

De plus, la série $\sum (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} (\gamma_{k+1} - \gamma_k) = \gamma_{n+1} - \gamma_1$$

Ainsi la suite (γ_n), qui est égale à la suite des sommes partielles (à γ_1 près), est convergente.

d) Soit $N \geqslant 2$. On reconnaît encore une série télescopique *(On vous demande de calculer la limite d'une série : soit c'est usuel, soit c'est télescopique...)*

$$\sum_{n=2}^{N} \Big(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\Big) = -1 + H_N - \sum_{n=2}^{N} (\ln(n) - \ln(n-1)) = -1 + H_N - \ln N + \ln 1 = \gamma_N - 1$$

Donc la série converge et, en passant à la limite $N \to +\infty$,

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\Big) = \ell - 1}$$

e) D'après le calcul fait à la question précédente, pour $n \geqslant 2$,

$$U_n = \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} \Big) = -\gamma_n + 1$$

Ainsi $U = \sum_{k=2}^{+\infty} \Big(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} \Big) = -\ell + 1 = U_n + R_n = -\gamma_n + 1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} \Big)$ puis

$$\boxed{\gamma_n - \ell = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} \Big)}$$

Comme $\gamma_1 = 1$, l'égalité reste vraie pour $n = 1$.

f) Un développement limité de $\ln(1-u)$ en 0 nous donne, pour $k \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \ln\Big(\frac{k}{k-1}\Big) - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} &= -\ln\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}(1+o(1)) \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big) \\ &= \frac{1}{k^2} o(1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{k \to +\infty} k^2 \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) = 0$. Soit ε un réel strictement positif. Par définition de la limite, il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier $k \geqslant n_0$: $\left| k^2 \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) \right| \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire

$$\boxed{\left| \ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2}}$$

g) Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann), par majoration, la série $\sum \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right)$ est absolument convergente donc convergente. De plus, en sommant les inégalités et en passant à la limite, il vient : Pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \Big) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

h)
- La série $\sum \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$ converge (3.d) et son reste est égal à $H_n - \ln n - \ell$ (3.e).
- La série $\sum \frac{1}{2(k(k-1)}$ est convergente ($\frac{1}{2k(k-1)} \sim \frac{1}{2k^2}$ et Riemann [1]) et télescopique :

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Donc pour $N \geqslant n \geqslant 1$, $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2k(k-1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2N}$ et en passant à la limite le reste est $\frac{1}{2n}$.

Finalement, en sommant les deux résultats,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \Big) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} \Big) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2k(k-1)} \Big) = H_n - \ln n - \ell - \frac{1}{2n}$$

En appliquant l'inégalité obtenue en prélim.2, pour $f(t) = \frac{1}{t^2}$, on trouve $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$

1. Ou comme combinaison linéaire de séries convergentes, en utilisant 3.g

L'intégrale et la série convergeant (Riemann), on peut passer à la limite pour $N \to +\infty$ et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$$

Donc 3.g s'écrit,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right)\right| = \left|H_n - \ln n - \ell - \frac{1}{2n}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$$

Donc par définition du petit o, $\boxed{H_n = \ln n + \ell + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

Partie 2

1) $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(1)$ donc $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. De même $\ln(n+2) \sim \ln n$. Ainsi,

$$\frac{\Big(\ln(n+1)\Big)^2}{\ln n \ln(n+2)} \sim \frac{(\ln n)^2}{\ln n \ln n} = 1$$

Donc $\dfrac{\Big(\ln(n+1)\Big)^2}{\ln n \ln(n+2)} = 1 + o(1)$, puis $v_n = 1 - 1 + o(1) = o(1)$ donc

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\geqslant 2} \text{ est convergente de limite } 0.}$$

2) Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\ln(n+2) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$. Par conséquent,

$$v_n = 1 - \frac{\Big(\ln(n+1)\Big)^2}{\ln n \ln(n+2)} = 1 - \frac{(\ln n)^2\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2}{(\ln n)^2\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln n}\right)} = \boxed{1 - \frac{\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2}{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln n}}}$$

3) Effectuons un développement asymptotique de $v_n = 1 - \dfrac{a_n}{b_n}$:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{2n^2\ln n} + \frac{1}{3n^3\ln n} + o\left(\frac{1}{n^3\ln n}\right)\right)^2 = 1 + \frac{2}{n\ln n} + \frac{1}{n^2\ln n} + \frac{1}{n^2(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2(\ln n)^2}\right)$$

$$b_n^{-1} = \left(1 + \frac{2}{n\ln n} + \frac{2}{n^2\ln n} + \frac{8}{3n^3\ln n} + +o\left(\frac{1}{n^3\ln n}\right)\right)^{-1} = 1 - \left[\frac{2}{n\ln n} + \frac{2}{n^2\ln n}\right] + \frac{4}{n^2(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2(\ln n)^2}\right)$$

Donc $v_n = 1 - a_n b_n^{-1} = \dfrac{-2^2+1+4}{n^2(\ln n)^2} - \dfrac{1}{n^2\ln n} + o\left(\dfrac{1}{n^2(\ln n)^2}\right) = \boxed{-\dfrac{1}{n^2\ln n} + \dfrac{1}{n^2(\ln n)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2(\ln n)^2}\right)}$

(Ouf ! Le $o\left(\frac{1}{n^3\ln n}\right)$ est nécessaire pour avoir du $o\left(\frac{1}{n^2(\ln n)^2}\right)$ ensuite, qui sinon se ferait manger par $o\left(\frac{1}{n^2(\ln n)}\right)$.)

Ainsi, $\left|v_n + \dfrac{1}{n^2\ln n}\right| = \dfrac{|1+\varepsilon_n|}{n^2(\ln n)^2}$ où $(\varepsilon_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc est bornée. Soit $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $|1+\varepsilon_n| \leqslant b$. Avec $\boxed{a = -1}$, il vient

$$\boxed{\left|v_n - \frac{a}{n^2\ln n}\right| \leqslant \frac{b}{n^2(\ln n)^2}}$$

4) Soit $w_n = \dfrac{1}{n^2(\ln n)}$. Comme $n^2 w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par définition de la limite, à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$w_n = |w_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$) donc $\boxed{\sum w_n \text{ converge}}$

D'après 3, $v_n \sim w_n$, donc $\boxed{\sum v_n \text{ converge}}$

FIN DE L'ÉPREUVE