Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, on considère

$$(E_a) \qquad (x-a)y'' + 2y' = 0$$

où y est une fonction inconnue de la variable x de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle réel et à valeur réelle.
On suppose $a > 0$. On considère une suite réelle (a_n) et on définit une fonction y comme la somme de la série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$ (avec $R > 0$).

1) On suppose que y est solution de (E_a). Déterminer, pour tout $x \in]-R, R[$, une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n), puis déterminer a_n en fonction de n et de a_1, pour tout $n \geqslant 1$. Exprimer y à l'aide de fonctions usuelles.

2) En déduire les fonctions développables en série entière qui sont solutions de (E_a) sur $]-a, a[$.

3) Montrer qu'elles forment un espace vectoriel de dimension 2 et en donner une base. En déduire l'ensemble des solutions de (E_a) sur $]-a, a[$.

Exercice 2

Préliminaires

Soit n_0 un entier naturel non nul, et f une fonction continue par morceaux, à valeurs positives, décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant n_0 + 1$:

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(On accompagnera la réponse d'une illustration graphique).

2) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant n_0 + 1$,

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

3) Comparer la convergence de la série $\left(\sum_{n \geqslant n_0} f(n)\right)$ et de l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie 1

1) On rappelle que e désigne la base du logarithme népérien ($\ln e = 1$).

Pour $t \geqslant e$, on considère la fonction f définie par : $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$.

a) Après avoir justifié la dérivabilité de f sur $[e, +\infty[$, donner la valeur de $f'(t)$.

b) Étudier les variations de f sur $[e, +\infty[$.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[e, +\infty[$.

d) Déterminer une primitive de f sur $[e, +\infty[$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$?

e) Que peut-on déduire du 1d pour la convergence de la série $\displaystyle\left(\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$?

2) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p}\right) - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) On admet, dans ce qui suit, que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}$.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

e) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\dfrac{u_n}{\ln n} + \dfrac{\ln n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ et conclure sur la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$.

3) On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $H_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$.

b) Montrer que la suite $(H_n - \ln n)$ converge (on pourra étudier ses variations). On notera ℓ sa limite.

c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln n$.
Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de la série $\displaystyle\left(\sum_{n\geqslant 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)\right)$?

Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat du 3b

d) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1}\right) = \ell - 1$.

e) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\gamma_n - \ell = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$.

f) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier $k \geqslant n_0$:

$$\left|\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2}$$

g) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

h) Montrer que $H_n = \ln n + \ell + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Partie 2

On considère la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ définie par $v_n = 1 - \dfrac{\Big(\ln(n+1)\Big)^2}{\ln n \ln(n+2)}$.

1) La suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

2) Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $v_n = 1 - \dfrac{\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2}{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln n}}$.

3) Déterminer un réel a tel que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\left|v_n - \dfrac{a}{n^2 \ln n}\right| \leqslant \dfrac{b}{n^2(\ln n)^2}$.

où b est un réel positif que l'on ne cherchera pas à déterminer.

4) Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2(\ln n)}$ converge. Que peut-on en déduire pour la série de terme général v_n ?

Les séries de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ sont appelées Séries de Bertrand (la série harmonique $\left(\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\right)$ est un cas particulier). Elles ont de nombreuses applications en mécanique statistique.

FIN DE L'ÉPREUVE