

Épreuve de Mathématiques 7

Correction

Exercice 1 (E3A PC A 2011)

Partie 1 (Résultats préliminaires)

1) a) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{2n+3} > 1$

Or $a_n > 0$ donc $\boxed{(a_n) \text{ est décroissante.}}$

Comme (a_n) est minorée par 0, $\boxed{(a_n) \text{ est convergente.}}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)((2n-n)!)} = \dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{2n+1}{2n+3}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$$

Donc, d'après d'Alembert, la série $\sum a_n z^n$ converge lorsque $|z| < 1$ et diverge lorsque $|z| > 1$.

Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est $\boxed{R = 1}$.

2) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue sur l'intervalle fermé de bornes 0 et x, donc elle admet des primitives, donc $\boxed{F \text{ existe.}}$

La fonction f est continue (donc continue par morceaux) sur $[0, +\infty[$. De plus

$$f(t) \sim \frac{1}{t^2}$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (Riemann, $2 > 1$), donc f (qui est positive) aussi.

Par conséquent $\boxed{\alpha \text{ existe.}}$

b) Soit $x > 1$. On effectue le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$, qui envoie $[1, x]$ sur $[1/x, 1]$.

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}}\frac{-\,\mathrm{d}u}{u^2} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^4}}$$

Donc en passant à la limite quand $t \to +\infty$ (l'intégrale converge d'après a)),

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}}$$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$ d'après b).

Donc, par définition de F, $\boxed{\alpha = 2F(1)}$.

d) Pour tout n, $f(n) \geqslant 0$, et

$$f(n) \sim \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente $(2 > 1)$, donc $\boxed{\text{la série de terme général } f(n) \text{ converge.}}$

e) Montrer que $\alpha \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leqslant \alpha + 1$.

Partie 2 (Intégrales de Wallis)

Dans cette partie, si $n \in \mathbb{N}$, I_n désigne l'intégrale suivante : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$.

4) Montrer que (I_n) est une suite décroissante et convergente.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (utiliser une intégration par partie).

6) En déduire que $((n+1)I_{n+1}I_n)$ est constante (et donner sa valeur).

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2}a_n$ et $I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$.

8) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n-2}}{I_n}$.

b) Calculer la limite des suites de terme général $\frac{I_{n-2}}{I_n}$, $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ et nI_n^2.

c) Donner un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

9) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

b) En déduire que le terme a_n est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ en $+\infty$.

c) Donner la nature des séries de terme général

$$a_n \qquad \frac{a_n}{4n+1} \qquad (-1)^n a_n \qquad \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$$

Partie 3 (Développement en série entière de F et utilisation)

On considère la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$, on note $h(x)$ sa somme.

On rappelle le résultat de 2.9.b : $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

1) Étude de h.

a) Donner le rayon de convergence de la série entière définissant h.

b) Montrer que $h(1)$ et $h(-1)$ existent.

c) Énoncer le théorème de continuité de la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ sur le segment $[0, R]$ et en déduire que h est continue sur $[-1, 1]$.

2) Développement en série entière de F

a) Montrer que f puis F sont développables en série entière au voisinage de 0 et préciser leur développement en série entière.

b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ $F(x) = h(x)$.

c) En déduire que $\alpha = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

3) Valeur approchée de α : Dans cette question, si $p \in \mathbb{N}$, S_p désigne la p-ième somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$, soit $\displaystyle S_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leqslant \dfrac{2}{4p+5} a_{p+1}$.

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{(p+1)^{\frac{3}{2}}}$

c) En déduire un entier p tel que $2S_p$ soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Exercice 2 (E3A PSI B 2009)

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières.
Soit (α_n) une suite réelle.
On rappelle que la relation $\alpha = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ signifie que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n\alpha_n = 0$.

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1) Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge. On pourra commencer par montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ à partir d'un certain rang.

2) Soit β un réel quelconque et $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\mu}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

3) On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geqslant N$, on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

b) Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geqslant N$, on ait $u_n \leqslant K v_n$.

c) Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.

4) On suppose que $0 \leqslant \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5) Pour $n \geqslant 2$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $y_n = \dfrac{1}{\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Partie B.

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

1) Pour $n \geqslant 2$, on pose $\displaystyle w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

2) Pour $n \geqslant 1$, on considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.

a) Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.

b) Etablir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

3) Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1 \ ; \ \forall n \geqslant 1, \ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \ ; \ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

a) Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et pour $x \in]-R, R[$, la valeur de $S(x)$.

b) Utimiser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

c) Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$$

d) Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.

e) On suppose que $-1 < \alpha < 0$.
i) Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.
ii) Montrer que la série $\sum a_n$ converge.
iii) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

FIN DE L'ÉPREUVE