Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1 (d'après E3A PC 2014)

Partie 1

1) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad A_\theta^k = A_{k\theta}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Ainsi,

$$\begin{aligned}
A_\theta^{k+1} &= A_{k\theta}A_\theta = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta \sin\theta & -\cos k\theta \sin\theta - \sin k\theta\cos\theta \\ \sin k\theta \cos\theta + \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  D'après les formules de trigonométrie. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad A_\theta^k = A_{k\theta}}$

Géométriquement, A_θ est la matrice d'une rotation d'angle θ (et de centre O) dans $\mathbb{R}^2$. Donc A_θ^k est la composée de k fois la rotation d'angle θ.
Ainsi, ce résultat signifie que $\boxed{\text{Composer } k \text{ fois la rotation d'angle } \theta \text{ donne la rotation d'angle } k\theta}$

2) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad ({}^tB)^k = {}^t(B^k)$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie car $I_n = {}^tI_n$.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie : $({}^tB)^k = {}^t(B^k)$. De plus ${}^tB{}^tA = {}^t(AB)$.
  Par conséquent $({}^tB)^{k+1} = {}^tB({}^tB)^k = {}^tB{}^t\left(B^k\right) = {}^t(B^{k+1})$. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad ({}^tB)^k = {}^t(B^k)}$

3) $A_\theta \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$ (${}^tA_\theta A_\theta = I_2$) donc $A_\theta^{-1} = {}^tA_\theta$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente,

$$A_\theta^{-k} = (A_\theta^{-1})^k = ({}^tA_\theta)^k = {}^t(A_\theta)^k$$

Or d'après 1), $A_\theta^k = A_{k\theta}$, et comme cosinus est paire et sinus imparie ${}^tA_{k\theta} = A_{-k\theta}$. D'où $A_\theta^{-k} = A_{-k\theta}$.
Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ A_\theta^k = A_{k\theta}}$

4) Cherchons $M = A_\theta$ telle que $M^p = A_{p\theta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_{\pi/2}$.

Choisissons par exemple $\theta = \dfrac{\pi}{2p}$ et donc

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) & -\sin\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) & \cos\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) \end{pmatrix}}$$

D'après 1), $M^p = A_\theta^p = A_{p\theta} = A_{\pi/2}$ donc convient.

Partie 2

- ${}^tMM = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3$ donc $\boxed{M \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})}$.
- $\det(M) = 1$ donc $\boxed{M \in SO_3(\mathbb{R}) \text{ et } u \text{ est une rotation}}$
- Axe de la rotation : Soit $E_1 = \mathrm{Ker}\,(I_3 - M)$.

$$\begin{aligned} X \in E_1 &\iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z &=& 0 \\ 3y + 3z &=& 0 \\ 3y + 3z &=& 0 \end{array}\right. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& -z \end{array}\right. \\ &\iff X \in \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Donc $E_1 = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Ainsi

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur portant et orientant l'axe de la rotation}}$$

- Angle θ de la rotation : Comme $\mathrm{Tr}\,(M) = 2 = 1 + 2\cos\theta$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\boxed{\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}}$.

Cherchons le signe de θ. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $MX = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis

$$\det(e_1, x, u(x)) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(-2-1) > 0$$

Donc, *lorsque l'axe est orienté par* e_1, $\theta = +\dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion : $\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ est une rotation d'axe porté par } e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et d'angle } +\frac{\pi}{3}}$

Exercice 2 (PT 2009, A, partie C)

1) Question de cours : vous avez donc tous su la faire.

2) Soit U une matrice orthogonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\Phi(MU)^2 = \mathrm{Tr}\,(MU^t(MU)) = \mathrm{Tr}\,(MU^tU^tM) = \mathrm{Tr}\,(MI_n^tM) = \Phi(M)^2$$

Donc $\boxed{\Phi(MU) = \Phi(M)}$

3) a) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (de dimension 2, ces matrices n'étant pas colinéaires).

On peut aussi procéder classiquement en montrant que c'est non vide et stable par combinaison linéaire.

b) *On remarque que* $\dim F = 2$ *donc* $\dim F^\perp = 4 - \dim F = 2$*, ce qui permettra de vérifier ses calculs.*

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in F^\perp &\iff \left(M \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \left(M \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \\ &\iff \text{Tr}\begin{pmatrix} x & * \\ * & -t \end{pmatrix} = x - t = 0 \quad \text{et} \quad \text{Tr}\begin{pmatrix} y & * \\ * & z \end{pmatrix} = y + z = 0 \\ &\iff M \in \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Ces deux matrices ne sont pas colinéaires, elles forment donc une base de $F^\perp$.

c) Les deux matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ précédentes sont orthogonales pour $(.|.)$, donc la projection orthogonale p_F sur F s'écrit

$$A' = p_F(A) = \frac{(M_1|A)}{(M_1|M_1)}M_1 + \frac{(M_2|A)}{(M_2|M_2)}M_2 = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (PT 2007, A)

Partie 1

1)
- $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$
- $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$
- $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

2) Récurrence double : montrons que

$$\mathcal{H}_n : \deg T_n = n \text{ et son coefficient dominant est } a_n^{[n]} = 2^{n-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est vraie puisque $T_1 = X$ de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$.
- $\underline{\mathcal{H}_2}$ est vraie puisque $T_2 = 2X^2 - 1$ de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^1$.
- $\underline{\mathcal{H}_{n-1}\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ **et** $\mathcal{H}_{n-1}$ vraies. Alors

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

Or $\deg(XT_n) = n + 1$ et $\deg(T_{n-1}) = n - 1$ d'après $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$.
Ainsi $\deg(T_{n+1}) = n + 1$, et le coefficient dominant vient de $2XT_n$ uniquement. Il vaut le double de celui de T_n, donc $a_{n+1}^{[n+1]} = 2a_n^{[n]} = 2^n$. Par conséquent, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 1, \deg T_n = n \text{ et son coefficient dominant est } a_n^{[n]} = 2^{n-1}.}$

On a besoin des rangs n et $n-1$, donc il faut initialiser avec $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$. On peut aussi mettre les rangs n et $n-1$ dans $\mathcal{H}_n$, en commençant donc à $n = 2$.

3) Le produit de deux polynômes impairs est pair, et le produit d'un polynôme pair et d'un polynôme impair est impair.
Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad T_{2n} \text{ est pair et } T_{2n+1} \text{ est impair}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie car $T_0 = 1$ est paire et $T_1 = X$ est impair.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
  Le polynôme $2XT_{2n+1}$ est pair comme produit de deux polynômes impairs, et T_{2n} est pair. Donc T_{2n+2} est pair comme somme de polynômes pairs.
  Le polynôme $2XT_{2n+2}$ est impair comme produit d'un polynôme impair et d'un polynôme pair, et T_{2n+1} est impair. Donc T_{2n+3} est impair comme somme de polynômes impairs.
  Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad T_n \text{ a la parité de } n.}$

4) ⋆ $\underline{T_n(1)}$: La suite $(T_n(1))$ vérifie la relation de récurrence $T_{n+1}(1) = 2T_n(1) - T_{n-1}(1)$ avec pour premier termes $T_0(1) = T_1(1) = 1$. On peut donc résoudre à l'aide des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
Sinon, la récurrence (double) est rapide :

$$\mathcal{H}_n : \quad T_n(1) = 1$$

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ et $\underline{\mathcal{H}_1}$ sont vraies par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_n$ vraies. Alors $T_{n+1}(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$, donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad T_n(1) = 1}$

⋆ $\underline{T_n(-1)}$: Par parité, $T_{2n}(-1) = T_{2n}(1) = 1$ et $T_{2n+1}(-1) = -T_{2n}(1) = -1$. Donc $\boxed{T_n(-1) = (-1)^n.}$

⋆ $\underline{T_n(0)}$: Par parité, $\boxed{T_{2n+1}(0) = 0.}$
Soit $u_n = T_{2n}(0)$. Alors $u_0 = T_0(0) = 1$ et

$$u_{n+1} = T_{2n+2}(0) = 2 \times 0 \times T_{2n+1}(0) - T_{2n}(0) = -u_n$$

Ainsi (u_n) est une suite récurrente de raison -1 :
Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad T_{2n}(0) = (-1)^n}$

5) On note $(\mathscr{P})$ la propriété suivante pour une suite (P_n) de polynômes

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \qquad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

⋆ Unicité : Soit (P_n) et (Q_n) deux suites de polynômes vérifiant $(\mathscr{P})$. Soit $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = Q_n(\cos\theta) \Longrightarrow \forall x \in [-1, 1] \quad P_n(x) - Q_n(x) = 0$$

Ainsi $P_n - Q_n$ a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul : $P_n - Q_n = 0$. D'où l'unicité.

⋆ $\underline{(T_n) \text{ vérifie la propriété}}$. Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie car $\cos(0) = 1$.
- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est vraie car $T_1 = X$.
- $\underline{\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_n$ vraie. $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta)$$

- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

En conclusion, $\boxed{T_n \text{ est le seul polynôme qui vérifie } (\mathscr{P})}$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Partie 2

1) Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- φ est symétrique, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$:
$$\forall (P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2 \qquad \varphi(P,Q)=\int_0^\pi P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi Q(\cos\theta)P(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\varphi(Q,P)$$

- φ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned}\forall (P_1,P_2,Q)\in\mathbb{R}[X]^3\ \forall\lambda\in\mathbb{R} \qquad \varphi(P,Q) &= \int_0^\pi (P_1+\lambda P_2)(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^\pi (P_1(\cos\theta)Q(\cos\theta)+\lambda P_2(\cos\theta)Q(\cos\theta))\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^\pi P_1(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^\pi P_2(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \varphi(P_1,Q)+\lambda\varphi(P_2,Q)\end{aligned}$$
Donc $\varphi(\cdot,Q)$ est linéaire. La linéarité de $\varphi(P,\cdot)$ s'obtient par symétrie.

- $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P,P)=\displaystyle\int_0^\pi (P(\cos\theta))^2\,\mathrm{d}\theta\geqslant 0$ comme intégrale d'une fonction positive.

- Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P)=0$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^\pi (P(\cos\theta))^2\,\mathrm{d}\theta=0$.
Or $\theta\mapsto (P(\cos\theta))^2$ est une fonction continue et positive, donc son intégrale est nulle si et seulement si la fonction est nulle :
$$\forall\theta\in[0,\pi] \qquad (P(\cos\theta))^2=0$$
Donc $P(t)=0$ pour tout $t\in[-1,1]$ ($\cos\theta$ parcourt $[-1,1]$ lorsque θ parcourt $[0,\pi]$).
Or un polynôme ayant une infinité de racine est le polynôme nul : $P=0$.
Ainsi, φ est définie positive.

En conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$

2) Soit n et m deux entiers naturels distincts. Donc $n+m\neq 0$ et $n-m\neq 0$.
$$\begin{aligned}\varphi(T_n,T_m) &= \int_0^\pi T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(d'après partie 1, 5)}\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)\theta)+\cos((n-m)\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m}+\frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right]_0^\pi \mathrm{d}\theta=0\end{aligned}$$
Si $n=0$, $\varphi(T_n,T_n)=\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}\theta=\pi$. Sinon,
$$\varphi(T_n,T_n)=\|T_n\|^2=\int_0^\pi T_n(\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi \cos(n\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos(2n\theta))\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}+0$$
En conclusion, $\boxed{\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2 \quad n\neq m \quad \varphi(T_n,T_m)=0, \quad \text{et} \quad \begin{cases} & \varphi(T_0,T_0)=\|T_0\|^2=\pi\\ \forall n\in\mathbb{N}^* & \varphi(T_n,T_n)=\|T_n\|^2=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}}$

3) D'après 1)2), T_k est de degré k. La famille $\mathscr{B}=(T_0,\dots,T_n)$ est donc dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, elle est orthogonale d'après la question 2) précédente et composée de $n+1$ polynômes non nuls. Comme $\dim\mathbb{R}_n[X]=n+1=\mathrm{Card}\,\mathscr{B}$, c'est donc une *base*[1], et par définition d'une base

$\boxed{\text{Pour tout } P\in\mathbb{R}_n[X], \text{ il existe un unique } (n+1)\text{-uplet } (\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } P=\sum_{k=0}^n \alpha_k T_k}$

De plus $\varphi(P,T_k)=\alpha_k\|T_k\|^2$ donc $\alpha_k=\dfrac{\varphi(P,T_k)}{\|T_k\|^2}$.

1. On peut aussi remarquer que c'est une famille de degrés échelonnés, donc une base.

4) Propriété utilisée : si $p : E \to E$ est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F de dimension finie et de base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$, alors $p(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.

Comme $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, la projection orthogonale $p : E \to E$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit :

$$\boxed{p(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi(P, T_k)}{\|T_k\|^2} T_k}$$

(Ici, ce qui joue le rôle des e_i est $\frac{T_k}{\|T_k\|}$)

5) Si $p : E \to E$ est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F de dimension finie, alors $d(x, F) = \|p(x) - x\|$. Ainsi,

$$\boxed{d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|p(P) - P\|}$$

Exercice 4 (PT 2014, A)

Partie 1

1) p_D est un projecteur donc $p_D \circ p_D = p_D$, d'où, matriciellement

$$\boxed{A^2 = A}$$

2) Par définition d'un projecteur orthogonal, Ker $p_D \perp$ Im p_D.
Comme p_D est le projecteur sur $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n} \in$ Im p_D.
D'après les résultats[2] sur les projecteurs $\overrightarrow{u} - p_D(\overrightarrow{u}) \in$ Ker p_D.
Conclusion :

$$\boxed{\forall \overrightarrow{u} \in R^3 \qquad < \overrightarrow{u} - p_D(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{n} >= 0}$$

3) p_D est un projecteur sur $\overrightarrow{n}$, donc $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $p_D(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{n}$.
Ainsi, le résultat de la question précédente s'écrit : pour tout $\overrightarrow{u} \in R^3$,

$$< \overrightarrow{u} - \lambda \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} >=< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{n} > -\lambda < \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} >= 0$$

Comme $< \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} >= \|\overrightarrow{n}\|^2 = \frac{1+1}{2} = 1$, il vient $\lambda =< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{n} >$ puis

$$\boxed{p_D(\overrightarrow{u}) =< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{n} > \overrightarrow{n}}$$

4) D'après la question précédente, $p_D(\overrightarrow{n}) =< \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} > \overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}$ *(se retrouve aussi via $\overrightarrow{n} \in$ Im p_D et $p_D^2 = p_D$).*

5) Soit $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{e}_2 = j$ et $\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{e}_1 \wedge \overrightarrow{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + k)$.
Comme $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, en utilisant la formule trouvée à la question 3),

$$p(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1 \qquad p(\overrightarrow{e}_2) = 0 \qquad p(\overrightarrow{e}_3) = 0$$

Ainsi les valeurs propres de p_D sont 0, avec pour sous-espace propre $E_0 = \text{Vect}\,(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ et 1 avec $E_1 = \text{Vect}\,(\overrightarrow{e}_1) = D$.

6) $\dim E_0 + \dim E_1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc p_D est diagonalisable *(comme tout projecteur...)*.

7) Soit $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique (orthonormée) à la base (orthonormée) de diagonalisation. Ainsi $P \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = {}^tP$, puis

$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. Se redémontre très vite : $p_D(\overrightarrow{u} - p_D(\overrightarrow{u})) = p_D(\overrightarrow{u}) - p_D^2(\overrightarrow{u}) = 0$ car $p_D^2 = p_D$. Donc $\overrightarrow{u} - p_D(\overrightarrow{u}) \in$ Ker p_D

Partie 2

1) Là aussi, question de cours, donc tout le monde a su faire.

2) Idem.

a) $p(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{x}) + \lambda p(\overrightarrow{y})$ or $p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ car $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Im} p$ et $p(\overrightarrow{y}) = 0$ car $\overrightarrow{y} \in \operatorname{Ker} p$. D'où $\|p(\overrightarrow{u})\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2$

De plus, $\|\overrightarrow{u}\|^2 =< \overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y} >= \lambda^2\|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\lambda < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > + \|\overrightarrow{x}\|^2$

Donc l'inégalité s'écrit

$$\|\overrightarrow{x}\|^2 \leqslant \lambda^2\|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\lambda < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > + \|\overrightarrow{x}\|^2$$

En simplifiant par $\|\overrightarrow{x}\|^2$ il vient

$$\boxed{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda^2\|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\lambda < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >\geqslant 0}$$

Si $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >\neq 0$, alors $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ et l'expression ci-dessus change de signe en $\lambda = -\dfrac{2 < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >}{\|\overrightarrow{y}\|} \neq 0$, ce qui est absurde.

En conclusion, $\boxed{< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= 0}$

b) Nous venons de montrer que $\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \operatorname{Im} f \times \operatorname{Ker} f$, $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= 0$, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f \perp \operatorname{Ker} f$, ainsi

$$\boxed{p \text{ est un projecteur orthogonal}}$$

3) *Remarque culturelle : f^* s'appelle l'adjoint de f, et dans une base orthonormée sa matrice est la transposée de la matrice de f. En quelque sorte, c'est l'opération sur les endomorphisme qui correspond à la transposition sur les matrices.*

a) Pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $f^*(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\begin{aligned} f^*(\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) &= \sum_{i=1}^{n} < f(\overrightarrow{e}_i), \lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} > \overrightarrow{e}_i \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n} < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{x} > \overrightarrow{e}_i + \sum_{i=1}^{n} < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{y} > \overrightarrow{e}_i \\ &= \lambda f^*(\overrightarrow{x}) + f^*(\overrightarrow{y}) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f^* \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n}$

b) Soit $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, et $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e}_i$. Comme $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ est une base orthonormée, en développant

$$< \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}) >= \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j\overrightarrow{e}_j, \sum_{i=1}^{n} < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{y} > \overrightarrow{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{y} >$$

Car $< \overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j >= \delta_{ij}$. De plus, comme f est linéaire $f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\overrightarrow{e}_i)$ et par linéarité du produit scalaire

$$< f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{y} >$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad < f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}) >}$$

c) Soit $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. D'après ci-dessus, $< f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}) >$, donc

$$\forall\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \qquad 0 =< f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} > - < \overrightarrow{x}, g(\overrightarrow{y}) >=< \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}) - g(\overrightarrow{y}) >$$

Ainsi, $f^*(\overrightarrow{y}) - g(\overrightarrow{y}) \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$, donc $f^*(\overrightarrow{y}) = g(\overrightarrow{y})$.

Conclusion : $\boxed{g = f^*}$

4) **a)** Soit $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. De même qu'au 1)2), $\overrightarrow{y} - p(\overrightarrow{y}) \in \text{Ker } p$, $p(\overrightarrow{x}) \in \text{Im } p$, et $\text{Ker } p \perp \text{Im } p$. Donc $< p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} - p(\overrightarrow{y}) >= 0$, puis

$$\boxed{< p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< p(\overrightarrow{x}), p(\overrightarrow{y}) >}$$

b) Par symétrie des rôles joués par $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$, nous avons aussi

$$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2 \qquad < \overrightarrow{x}, p(\overrightarrow{y}) >=< p(\overrightarrow{y}), \overrightarrow{x} >=< p(\overrightarrow{y}), p(\overrightarrow{x}) >=< p(\overrightarrow{x}), p(\overrightarrow{y}) >$$

D'où $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $< \overrightarrow{x}, p(\overrightarrow{y}) >=< p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >$
D'après a), $\boxed{p = p^*}$

5) **a)** Soit $\overrightarrow{x} \in \text{Im } p^*$, soit $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{x} = p^*(\overrightarrow{x}_0)$. D'après 3)b),

$$\begin{aligned} \forall \overrightarrow{y} \in \text{Ker } p \qquad < p(\overrightarrow{y}), \overrightarrow{x}_0 > &= < \overrightarrow{0}, \overrightarrow{x}_0 >= 0 \\ &= < \overrightarrow{y}, p^*(\overrightarrow{x}_0) >=< \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} > \end{aligned}$$

D'où $\forall \overrightarrow{y} \in \text{Ker } p$, $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= 0$. C'est-à-dire $\overrightarrow{x} \in (\text{Ker } p)^\perp$.
Conclusion : $\boxed{\text{Im } p^* \subset (\text{Ker } p)^\perp}$

b) Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Comme p est un projecteur $\overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}) \in \text{Ker } p$ et donc $\boxed{< \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >= 0}$
L'égalité précédente s'écrit

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \qquad 0 =< \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > - < p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > - < \overrightarrow{x}, p^*(\overrightarrow{y}) >=< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} - p$$

D'où $\overrightarrow{y} - p^*(\overrightarrow{y}) \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$ donc $\boxed{\overrightarrow{y} = p^*(\overrightarrow{y})}$
Par conséquent, $\overrightarrow{y} \in \text{Im } p^*$.
Ainsi nous venons de montrer $\overrightarrow{y} \in (\text{Ker } p)^\perp \Longrightarrow \overrightarrow{y} \in \text{Im } p^*$, i.e.

$$\boxed{(\text{Ker } p)^\perp \subset \text{Im } p^*}$$

En combinant a) et b) nous avons donc montré $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p^*$.

c) Supposons que $p = p^*$. Alors la question précédente s'écrit $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p$ et p est un projecteur orthogonal.
Donc $\boxed{p = p^* \Longrightarrow p \text{ est un projecteur orthogonal}}$