Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

1) Montrer par un calcul que l'on a $\forall k \in \mathbb{N},\ A_\theta^k = A_{k\theta}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

2) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $({}^tB)^k = {}^t(B^k)$.

3) En déduire que $\forall k \in \mathbb{Z},\ A_\theta^k = A_{k\theta}$.

4) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie 2

Déterminer la nature de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à l a matrice $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$.
On définit l'application $(A,B) \mapsto (A|B)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad (A|B) = \mathrm{Tr}\,(A\,{}^tB)$$

1) Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire.

2) On note Φ la norme associé au produit scalaire $(.|.)$.
Soit U une matrice orthogonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\Phi(MU)$ en fonction de $\Phi(M)$.

3) On considère désormais que $n = 2$. On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Donner une base de $F^\perp$.

c) Déterminer la matrice A', image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par la projection orthogonale sur F.

Exercice 3

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.
Enfin, P' et P'' désigneront respectivement les polynômes dérivés de P et P'.

Soit (T_k) la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

Dans tout le problème et sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

Partie 1

1) Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.

2) Montrer que T_n est de degré n, déterminer son coefficient dominant.

3) Étudier la parité de T_n.

4) Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.

5) Montrer que T_n est le seul polynôme qui vérifie :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Partie 2

On considère l'application φ de E^2 vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2 \quad \varphi(P,Q) = \int_0^\pi P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) Soit n et m deux entiers naturels distincts. Calculer $\varphi(T_n, T_n)$ et $\varphi(T_n, T_m)$.

3) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$$

On exprimera α_k à l'aide de T_k et de P.

4) Exprimer la projection orthogonale $p(P)$ d'un polynôme $P \in E$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ à l'aide de $(T_0, \ldots, T_n)$.

5) Pour $P \in E$, exprimer $d(P, \mathbb{R}_n[X])$.

Exercice 4

Partie 1

Dans cette partie, on travaille dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, noté $<,>$.
On désigne par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base orthonormée directe canonique de $\mathbb{R}^3$. On consid'ere le vecteur

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$$

On désigne par D la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{n}$. On note p_D la projection orthogonale sur D et A sa matrice dans la base canonique.

1) Que vaut A^2.

2) Que vaut, pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $< \overrightarrow{u} - p_D(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{n} >$?

3) En déduire que, pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $p_D(\overrightarrow{u}) = < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{n} > \overrightarrow{n}$.

4) Calculer $p_D(\overrightarrow{n})$.

5) Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de p_D.

6) L'endomorphisme p_D est-il diagonalisable ?

7) Déterminer la matrice A.

Partie 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On travaille maintenant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, noté toujours $<,>$. On désigne par $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On note $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1) Soit p un projecteur orthogonal. En écrivant, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{u} = p(\overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u}))$, montrer que

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \qquad \|p(\overrightarrow{u})\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|$$

2) Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \qquad \|p(\overrightarrow{u})\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|$$

a) Soit $\overrightarrow{x} \in \text{Im } p$ et $\overrightarrow{y} \in \text{Ker } p$. En considérant le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda^2 \|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\lambda < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > \geqslant 0$$

En déduire que $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= 0$.

b) Montrer que p est un projecteur orthogonal.

3) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application f^* par

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad f^*(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{x} > \overrightarrow{e}_i$$

a) Vérifier que f^* est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) En exprimant $\overrightarrow{x}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$, montrer que,

$$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad < f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}) >$$

c) Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad < f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, g(\overrightarrow{y}) >$$

Montrer que $g = f^*$.

4) Soit p un projecteur orthogonal.

a) Montrer que, pour tout $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $< p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< p(\overrightarrow{x}), p(\overrightarrow{y}) >$.

b) En déduire que $p = p^*$.

5) Soit p un projecteur.

a) Montrer que $\text{Im } p^* \subset (\text{Ker } p)^\perp$.

b) Soit $\overrightarrow{y} \in (\text{Ker } p)^\perp$. Montrer que, pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $< \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >= 0$.
En déduire que $\overrightarrow{y} = p^*(\overrightarrow{y})$ puis que $(\text{Ker } p)^\perp \subset \text{Im } p^*$.

c) Montrer que si $p = p^*$, alors p est un projecteur orthogonal.

FIN DE L'ÉPREUVE