Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (E3A PC 2013)

1) a) Par définition de $\mathscr{R}$, $\boxed{S(0,0)}$.

Comme $\overrightarrow{i} = \dfrac{1}{p}\overrightarrow{AF}$ et S le milieu du segment $[AF]$, $\boxed{A(-p/2,0)}$ et $\boxed{F(p/2,0)}$

Comme $(Ox) = \Delta$ et $\Delta \perp \mathscr{D}$ par construction, et que $A \in \mathscr{D}$, $\boxed{\text{L'équation de } \mathscr{D} \text{ est } x = -\dfrac{p}{2}}$

b) Soit $M(x,y)$ un point du plan. Le point H a pour coordonnées $(-p/2, y)$. Par définition,

$$M \in \mathscr{P} \iff MF^2 = MH^2 \iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

En développant et en simplifiant, il vient $\boxed{M \in \mathscr{P} \iff y^2 = 2px}$

2) a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t/p \\ 1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$ donc c'est un vecteur directeur de la tangente.

$$P(x,y) \in \mathscr{T}_0 \iff \det\left(\overrightarrow{M_0P}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - \dfrac{t_0^2}{2p} & \dfrac{t_0}{p} \\ y - t_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ainsi, une équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ est : $\boxed{x - \dfrac{t_0}{p} y = -\dfrac{t_0^3}{2p}}$

De même, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ étant un vecteur normal à $\mathscr{N}_0$, il vient $\boxed{\dfrac{t_0}{p} x + y = \dfrac{t_0^2}{2p^2} + t_0}$

b) i) Par définition de M_0 et de la parabole, $M_0F = M_0H_0$. Donc

$$\boxed{\text{Le triangle } FH_0M_0 \text{ est isocèle de sommet } M_0}$$

ii) Montrons que $\mathscr{T}_0 \perp (FH_0)$: H_0 a pour coordonnées $(-p/2, t_0)$, donc $\overrightarrow{FH_0}\begin{pmatrix} -p \\ t_0 \end{pmatrix}$, et

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0).\overrightarrow{FH_0} = \begin{pmatrix} t_0/p \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -p \\ t_0 \end{pmatrix} = 0$$

Donc $\mathscr{T}_0 \perp (FH_0)$. De plus, d'après 2bi, FH_0M_0 isocèle en M_0, donc la hauteur et la médiatrice sont confondues :

$$\boxed{\mathscr{T}_0 \text{ est la médiatrice du segment } [FH_0]}$$

3) **a)** Soit s une abscisse curviligne : $s'(t) = \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\| = \sqrt{\frac{t^2}{p^2}+1}$ Comme $\overrightarrow{T}_0 = \frac{1}{s'(t_0)}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$, il vient

$$\boxed{\overrightarrow{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{t_0^2}{p^2}+1}}\begin{pmatrix} \frac{t_0}{p} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N}_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{t_0^2}{p^2}+1}}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{t_0}{p} \end{pmatrix}}$$

b) D'après les formules de Frenet, $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = s'(t)\gamma\overrightarrow{N}$.

$$\text{Or}\quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\frac{2t/p^2}{\left(\frac{t^2}{p^2}+1\right)^{3/2}}\begin{pmatrix} \frac{t}{p} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\left(\frac{t^2}{p^2}+1\right)^{1/2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{t^2}{p^2}+1\right)^{3/2}}\begin{pmatrix} -\frac{t^2}{p^3}+\frac{t^2}{p^3}+\frac{1}{p} \\ -\frac{t}{p^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{p\left(\frac{t^2}{p^2}+1\right)^{3/2}}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ t/p \end{pmatrix}}_{=s'(t)\overrightarrow{N}}$$

(On peut se contenter de faire le calcul sur une seule coordonnée).

Donc $\gamma = -\frac{1}{p\left(\frac{t^2}{p^2}+1\right)^{3/2}}$, et $\boxed{R_0 = \frac{1}{\gamma_0} = -p\left(\frac{t_0^2}{p^2}+1\right)^{3/2}}$.

On pouvait aussi utiliser la formule : $\boxed{\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{s'^3}} = \frac{\begin{vmatrix} t_0/p & 1/p \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{s'(t_0)^3} = -\frac{1}{p((t_0/p)^2+1)^{3/2}}$

c) Par défintion, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N}$. Dans le repère $\mathscr{R}$, $\overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2p} \\ t \end{pmatrix} - \frac{p((t/p)^2+1)^{3/2}}{\sqrt{(t/p)^2+1}}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{t}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2p} + p\left(\frac{t^2}{p^2}+1\right) \\ t - \left(\frac{t^2}{p^2}+1\right)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \frac{3t^2}{2p} \\ -\frac{t^3}{p^2} \end{pmatrix}$$

Donc une équation paramétrique de la développée de $\mathscr{P}$ est $\boxed{\begin{cases} x_C(t) &= p + \frac{3t^2}{2p} \\ y_C(t) &= -\frac{t^3}{p^2} \end{cases}}$

4) *La courbe $\mathscr{C}$ est la développée de $\mathscr{P}$ dans le cas $p = 2$. Ce qui peut se deviner vu l'enchaînement des questions, et est fortement suggéré par la dernière question.*

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ de sorte qu'on peut réduire l'étude à $\mathbb{R}^+$ et obtenir la courbe entière par symétrie d'axe (Ox).

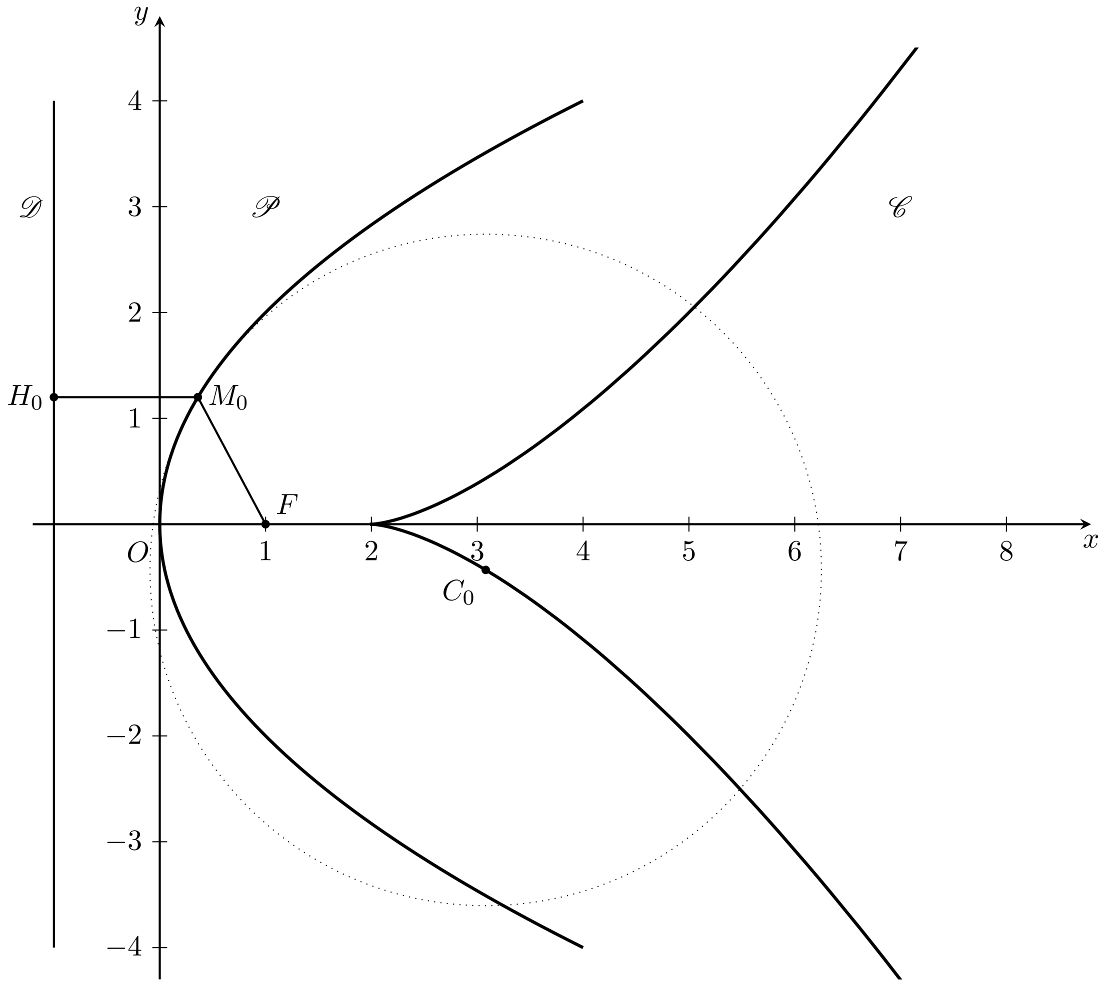
b) $\begin{cases} x'(t) &= \frac{3}{2}t \\ y'(t) &= -\frac{3}{4}t^2 \end{cases}$

t	0	$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$
x	2 ↗	$+\infty$
$y'(t)$	0	$-$
y	0 ↘	$-\infty$

c) Les dérivées de x et de y s'annulent en $t = 0$, leur développement limité est donné par leur expression car ce sont des polynômes. On a donc, en posant $f(t) = (x(t), y(t))$, d'après la formule de Taylor $\dfrac{f^{(2)}(0)}{2!} = \left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$ et $\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!} = \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$, on a donc un point de rebroussement de première espèce.

d) Lorsque $t \to +\infty$, on a une branche infinie car x et y tendent vers l'infini. De plus, $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ de sorte qu'on a une $\boxed{\text{branche parabolique d'axe } (Oy).}$

e) Pour $p = 2$, on a :



Exercice 2 (E3A MP 2013 — PT B 2008)

1) Les asymptotes de $\mathcal{H}$ ont pour équations $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$. Elles sont perpendiculaires si et seulement si $-\dfrac{b}{a} \times \dfrac{b}{a} + 1 = 0$ (vecteurs directeurs orthogonaux), c'est-à-dire $a = b$ ($a > 0$ et $b > 0$).

2) Avec $b = a$, l'équation s'écrit $x^2 - y^2 = a^2$, c'est-à-dire $(x - y)(x + y) = a^2$.

En posant $\boxed{\vec{I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) \text{ et } \vec{J} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})}$ (ce qui revient à effectuer une rotation de $+\dfrac{\pi}{4}$)

on a $\begin{cases} X = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ Y = \dfrac{-x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ et $\mathcal{H}$ a pour équation $\boxed{XY = -a^2/2}$

3) **a)** L'équation traduit la condition $\Omega M^2 = R^2$, soit $\boxed{(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = R^2,}$ ou, en développant, $\boxed{X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y = R^2 - \alpha^2 - \beta^2.}$

b) Soit $M(X,Y)_{\mathcal{R}'}$ un point de l'hyperbole. Puisque $XY = k \neq 0$, on a forcément $X \neq 0$, et donc $Y = k/X$. En remplaçant dans l'équation du a), on voit après calculs que M est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $\boxed{X^4 - 2\alpha X^3 + (\beta^2 + \alpha^2 - R^2)X^2 - 2\beta k X + k^2 = 0.}$
Les abscisses X_A, X_B, X_C et X_D vérifients donc cette relation.

c) Les quatre points étant distincts et sur l'hyperbole, leurs abscisses sont forcément distinctes ; ce sont donc les quatre racines du polynôme trouvé en b). Les relations entre coefficients et racines montrent alors que $\boxed{X_A X_B X_C X_D = k^2 = a^4/4.}$

4) Supposons réciproquement la relation $X_A X_B X_C X_D = k^2$ vérifiée. On peut alors développer le polynôme $(X - X_A)(X - X_B)(X - X_C)(X - X_D)$ sous la forme $X^4 + pX^3 + qX^2 + rX + k^2$.
Posons $\alpha = -p/2$ et $\beta = -r/(2k)$. Soit X l'abscisse de l'un des quatre points et Y son ordonnée. Puisque X est racine du polynôme précédent et $X = k/Y$, on a

$$X^2 - 2\alpha X + q - \frac{2k\beta}{X} + \frac{k^2}{X^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad X^2 - 2\alpha X + q - 2\beta Y + Y^2 = 0$$

soit finalement $\boxed{(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - q.}$
Cette relation étant vérifiée par les quatre points, on a donc forcément $\alpha^2 + \beta^2 - q > 0$ (strictement car les points sont distincts) ; c'est donc l'équation d'un cercle, de centre (α, β) et de rayon $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - q}$.

$\boxed{\text{Les quatre points appartiennent donc bien à un même cercle.}}$

Exercice 3

1) La fonction ρ est 2π-périodique, on se restreint a priori à un intervalle de longueur 2π.
$\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$ donc $M(\theta + \pi)$ est obtenu à partir de $M(\theta)$ par la rotation d'angle π puis la symétrie centrale... c'est-à-dire $M(\theta + \pi) = M(\theta)$. On peut donc se restreindre à un intervalle de longueur π.
De plus, $\rho\Big(\dfrac{\pi}{2} - \theta\Big) = \sin^3\theta + \cos^3\theta = \rho(\theta)$, donc on peut se contenter d'étudier Γ sur $\boxed{I = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]}$, la courbe sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ étant obtenue par $\boxed{\text{symétrie par rapport à la première bissectrice } (\theta = \tfrac{\pi}{4})}$

2) $\rho'(\theta) = 3\cos\theta\sin\theta(-\cos\theta + \sin\theta) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sin(2\theta)\sin(\theta - \pi/4)$

θ	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
$\sin(2\theta)$		$+$	0	$-$	
$\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$	0	$+$		$+$	
$\rho'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	
ρ	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) Sur l'intervalle I, $\rho = 0$ pour $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

La tangente aura alors pour équation polaire $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ (car on est en O), c'est-à-dire $\boxed{y = -x}$.

4) **a)** $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} = \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3\cos\theta\sin\theta(-\cos\theta + \sin\theta) \\ \cos^3\theta + \sin^3\theta \end{pmatrix}}$

Lorsque la droite n'est pas verticale dans le repère polaire (c'est-à-dire pour $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2}$: tel que $3\cos\theta\sin\theta(-\cos\theta+\sin\theta) \neq 0$), la pente est le coefficient directeur

$$\boxed{m = \frac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{3\cos\theta\sin\theta(-\cos\theta+\sin\theta)}}$$

b) En terme d'angle, une pente de -1 correspond à un angle de $-\frac{\pi}{4}$ (modulo π). Donc, toujours en terme d'angle, la droite $\mathscr{D}$ devra faire un angle de $-\theta - \frac{\pi}{4}$ dans le repère mobile.

Ce qui correspond à une pente (donnée par la tangente) de $\boxed{m = \tan\left(-\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$.

c) D'après 3a et 3b, la tangente aura pour pente -1 lorsque (pour $\theta \in I - \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$)

$$\frac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{3\cos\theta\sin\theta(-\cos\theta+\sin\theta)} = \tan\left(-\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

c'est-à-dire *(les fractions c'est le Mal, et on veut un produit)*

$$(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - (\sin\theta+\cos\theta)(3\cos\theta\sin\theta) = 0 \tag{1}$$

Or $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ par conséquent, en factorisant le $\cos^3\theta + \sin^3\theta$,

$$\begin{aligned}
(1) &\iff (\cos\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta - 3\cos\theta\sin\theta) = 0 \\
&\iff \cos\theta+\sin\theta = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - 4\sin\theta\cos\theta = 0 \qquad (\text{car } \cos^2 + \sin^2 = 1) \\
&\iff \tan\theta = -1 \qquad \text{ou} \qquad 2\sin 2\theta = 1 \\
&\iff \theta = \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{5\pi}{12}
\end{aligned}$$

Nous avons écarté les points où la tangente est verticale dans le repère mobile, c'est-à-dire portée par $\vec{v}_\theta$. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, le vecteur directeur $\vec{v}_{\frac{\pi}{4}}$ donne une pente de -1 dans le repère fixe : $\theta = \frac{\pi}{4}$ convient. Par contre, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{v}_{\frac{\pi}{2}} = -\vec{i}$ ne convient pas.

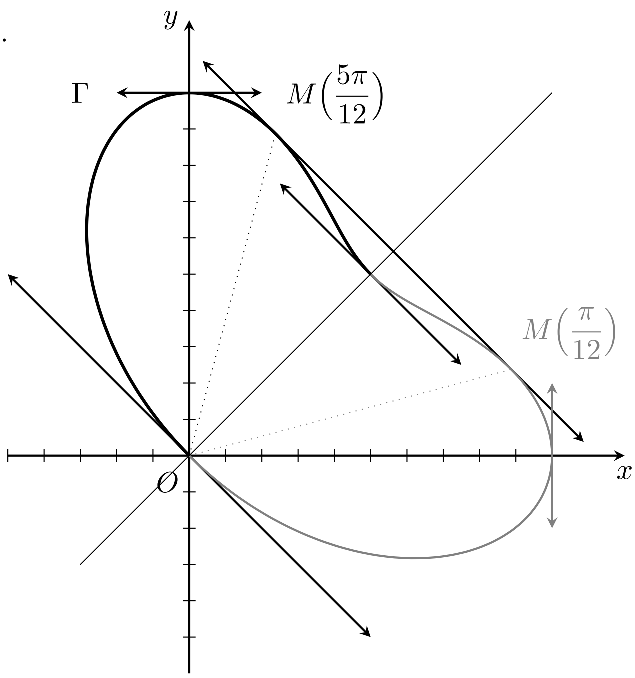
Par symétrie, on rajoute $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$.
En conclusion, les points où la tangente a pour pente -1 sont exactement les points d'angles polaires $\boxed{\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}}$

d) Les tangentes ont pour équation $y = -x+b$, et passent par $M(\theta)$ de coordonnées $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

- $\underline{\theta = \frac{\pi}{4}}$: $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a pour coordonnées $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
  Ainsi la tangente a pour équation $\boxed{y = -x+1}$
- $\underline{\theta = \frac{5\pi}{12}}$: $\rho\cos\theta = \cos^4\theta + \sin^3\cos\theta = (\cos^2\theta)^2 + \sin^2\theta\frac{\sin 2\theta}{2} = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\sin 2\theta$
  Donc $x\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \left(\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2}\right)\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{11+2\sqrt{3}}{16}$
  De même, $y = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\sin 2\theta$ donc $y\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{11-2\sqrt{3}}{16}$ *(c'est une sorte de conjugué, on change $\sqrt{3}$ en $-\sqrt{3}$).*
  Donc $b = x+y = \frac{11}{8}$, et la tangente a pour équation $\boxed{y = -x + \frac{11}{8}}$
- $\underline{\theta = \frac{5\pi}{12}}$: Comme la tangente en $\theta = \frac{5\pi}{12}$ est perpendiculaire à l'axe de symétrie, elle est inchangée par la symétrie : c'est la même droite qui est tangente en $\theta = \frac{\pi}{12}$. $\boxed{y = -x + \frac{11}{8}}$

- $\underline{\theta = \dfrac{3\pi}{4}}$: $\boxed{y = -x}$.

5) Tracé :



6) Nous avons du $\cos^3\theta$: multiplions par ρ^3. Avec $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ (donc $\rho^2 = x^2 + y^2$), il vient

$$\rho = \cos^3\theta + \sin^3\theta \Longrightarrow \rho^4 = (\rho\cos\theta)^3 + (\rho\sin\theta)^3 \Longrightarrow (x^2 + y^2)^2 = x^3 + y^3$$

Réciproquement, on a $(x^2 + y^2)^2 = x^3 + y^3 \Longrightarrow \rho = \cos^3\theta + \sin^3\theta$ ou $\rho = 0$.
Or $\rho = 0$ est déjà obtenu avec l'équation $\rho = \cos^3\theta + \sin^3\theta$ pour $\theta = -3\pi/4$. Donc

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ (x^2 + y^2)^2 = x^3 + y^3\Big\} = \Big\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \ \mid \ \rho = \cos^3\theta + \sin^3\theta \ \text{ et } \ \theta \in \mathbb{R}\Big\}$$

En conclusion : $\boxed{(x^2 + y^2)^2 = x^3 + y^3 \text{ est une équation cartésienne de } \rho = \cos^3\theta + \sin^3\theta}$

Exercice 4

1) $M(x, y) \in D_t \cap \mathscr{C}$ si et seulement si $y = tx$ et $x^y y^x = y^y$.
L'équation de $\mathscr{C}$ s'écrit $y\ln x + x\ln y - y\ln y = 0$. En remplaçant y par tx dedans, il vient

$$tx\ln x + (1 - t)x\ln(tx) = tx\ln x + (1 - t)x\ln t + (1 - t)x\ln x = 0$$

Après simplification ($x \neq 0$), on trouve $\boxed{x = e^{(t-1)\ln t}}$ et $\boxed{y = tx = e^{t\ln t}}$.
L'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite D_t d'équation $y = tx$ est donc <u>réduite à un point</u>.
Par construction, les points de coordonnées $(e^{(t-1)\ln t}, e^{t\ln t})$ sont sur la courbe $\mathscr{C}$.
Réciproquement, on remarque que les droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ balayent tout le quart de plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$, donc aucun point de $\mathscr{C}$ ne nous a échappé.

En conclusion, un paramétrage de $\mathscr{C}$ est : $\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & e^{(t-1)\ln t} \\ y(t) & = & e^{t\ln t} \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}_+^*}$

2) Les fonctions x et y sont dérivables sur R_+^*, et

$$x'(t) = \Big(-\frac{1}{t} + 1 + \ln t\Big)e^{(t-1)\ln t} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = (1 + \ln t)e^{t\ln t}$$

La fonction $g(t) = -\dfrac{1}{t} + 1 + \ln t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (vu sa dérivée) et $g(1) = 0$. Ainsi,

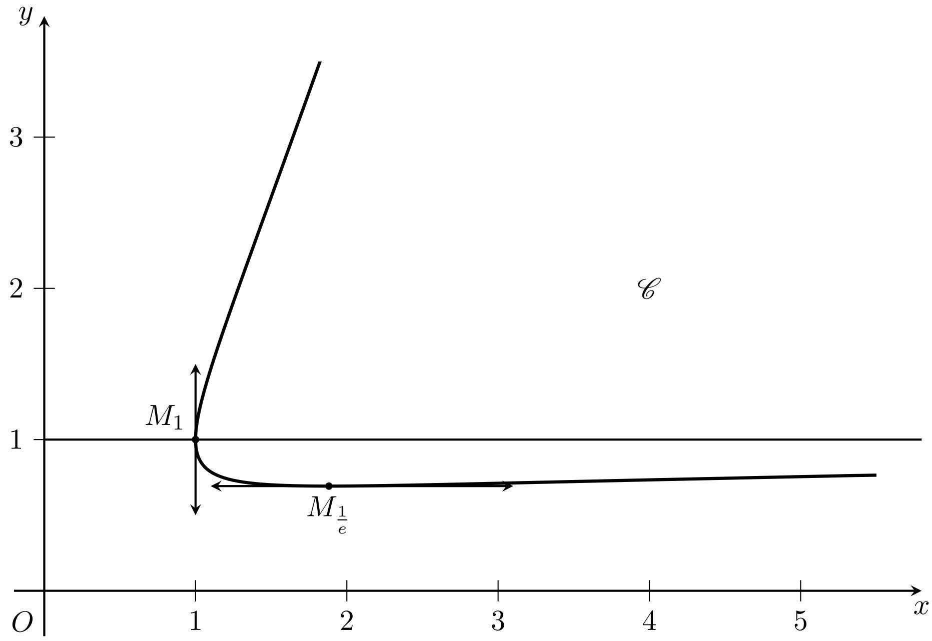
- $x(1/e) = e^{1-\frac{1}{e}}$
- $y(1/e) = e^{-\frac{1}{e}}$

t	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$x'(t)$	$\|$		$-$		0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	$x(1/e)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	$\|$	$-$	0		$+$		
y	1	$\searrow$	$y(1/e)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) Au voisinage de $t = 0$, la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. La courbe est situé sous l'asymptote.

Lorsque $t \to +\infty$: $\dfrac{y}{x} = t \to +\infty$, donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction $(0y)$.

4)



FIN DE L'ÉPREUVE