Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Dans le plan affine euclidien, on considère :

- F un point du plan.
- $\mathscr{D}$ une droite du plan, ne contenant pas F.
- Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par F et A le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et Δ.
- p la distance AF.
- S le milieu du segment $[AF]$.

Le but de cet exercice est l'étude de la parabole $\mathscr{P}$ de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$. Par définition $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points équidistants de F et de $\mathscr{D}$: $M \in \mathscr{P}$ si et seulement si $MF = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.
On considère le repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i} = \dfrac{1}{p}\overrightarrow{AF}$.

1) **a)** Donner les coordonnées de A, S et F et une équation de la droite $\mathscr{D}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

b) On considère M de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$. Montrer que $M \in \mathscr{P}$ si et seulement si $y^2 = 2px$.

2) $\mathscr{P}$ est paramétrée par $\begin{cases} x(t) & = & \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) & = & t \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et M_0 le point de $\mathscr{P}$ de paramètre t_0.

a) Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ et de la normale $\mathscr{N}_0$ en M_0 à $\mathscr{P}$.

b) On note H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathscr{D}$.

i) Donner la nature du triangle FH_0M_0.

ii) Vérifier que $\mathscr{T}_0$ est la médiatrice du segment $[FH_0]$.

3) **a)** Déterminer en M_0 le repère de Frenet de $\mathscr{P}$ noté $(M_0, \overrightarrow{T}_0, \overrightarrow{N}_0)$.

b) Déterminer en M_0 le rayon de courbure de $\mathscr{P}$ noté R_0.

c) Déterminer une équation paramétrique de la développée de $\mathscr{P}$, ensemble des centres de courbure.

4) On considère la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t) & = & 2 + \dfrac{3}{4}t^2 \\ y(t) & = & -\dfrac{1}{4}t^3 \end{cases}$.

a) Étudier les symétries de $\mathscr{C}$, et réduire le domaine d'étude en précisant les transformations du plan utilisées pour obtenir le reste de la courbe.

b) Donner le tableau de variations de x et y.

c) Étudier avec précision le point stationnaire de $\mathscr{C}$.

d) Étudier les éventuelles branches infinies.

e) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{P}$ (pour $p = 2$) sur une même figure.

Exercice 2

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où $a > 0$ et $b > 0$.

1) On rappelle qu'une hyperbole est dite équilatère lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires. Montrer que l'hyperbole $\mathcal{H}$ est une hyperbole équilatère si et seulement si $a = b$.
On considère désormais que cette condition est réalisée.

2) Montrer qu'il existe un repère orthonormé $\mathscr{R}' = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ dans lequel $\mathcal{H}$ admet une équation de la forme $XY = k$ avec $k \neq 0$.

3) On considère quatre points A, B, C, D, distincts deux à deux de l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ situés sur un même cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω, de coordonnées (α, β) dans $\mathscr{R}'$, et de rayon $r > 0$.

- **a)** Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ dans le repère $\mathscr{R}'$.
- **b)** Montrer que les abscisses X_A, X_B, X_C et X_D des points A, B, C, D dans le repère $\mathscr{R}'$ vérifient une équation polynomiale de degré quatre.
- **c)** Montrer que le produit de leurs abscisses dans $\mathscr{R}'$ est constant.

4) La condition obtenue à la question 3c est-elle suffisante pour affirmer que les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle ?

Exercice 3

On considère dans le plan $\mathscr{P}$ la courbe Γ d'équation polaire :

$$\rho(\theta) = \cos^3\theta + \sin^3\theta$$

1) Déterminer les symétries de Γ. On précisera les transformations du plan utilisées pour obtenir l'ensemble de la courbe.

2) Étudier les variations de ρ sur l'intervalle I déterminé à la question 1).

3) Déterminer l'équation de la tangente au point O (origine).

4) Points de Γ en lesquels la tangente a pour pente (coefficient directeur) -1 dans le repère fixe :

- **a)** Déterminer les coordonnées dans le repère mobile d'un vecteur directeur de la tangente en $M(\theta)$. Pente (dans le repère mobile) de la tangente en ce point.
- **b)** Traduire la condition « la droite $\mathscr{D}$ a pour pente -1 dans le repère fixe » en terme de pente dans le repère mobile $(\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{v}_\theta)$.
- **c)** Montrer que les points où la tangente a pour pente -1 (dans le repère fixe) sont exactement les points d'angles polaires $\theta = \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{3\pi}{4}$.
- **d)** Donner les équations (dans le repère fixe) des tangentes en ces points.

5) Tracer Γ.

6) En faisant apparaître $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ dans l'équation polaire de Γ, en déduire une équation cartésienne (implicite) de Γ. (On pensera à vérifier que tous les points de la courbe cartésienne sont paramétrés par la courbe en polaire).

Exercice 4

Soit $\mathscr{C}$ la courbe définie implicitement par l'équation

$$x^y y^x = y^y \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

1) Pour tout réel $t > 0$, étudier l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite D_t d'équation $y = tx$. En déduire un paramétrage de la courbe $\mathscr{C}$. (On vérifiera que tous les points de $\mathscr{C}$ ont été paramétrés).

2) Étudier les variations de x et y en fonction de t.

3) Étudier les branches infinies de $\mathscr{C}$.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

FIN DE L'ÉPREUVE