Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1 (E3A PC 2012)

1) Les fonctions x et y sont 2π périodiques donc on peut se restreindre à $t \in [-\pi, \pi]$. De plus, x est paire et y impaire, donc on peut se restreindre à $[0, \pi]$ et obtenir $\mathscr{D}$ toute entière grâce à la symétrie par rapport à (Ox) ($(x, y) \mapsto (x, -y)$).

2) Les fonctions x et y sont $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\begin{cases} x'(t) = 2\sin(t) + 2\sin(2t) = 4\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 4\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$$

Donc, pour $t \in [0, \pi]$, $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $t = 0$ ou $t = \dfrac{2\pi}{3}$.

Conclusion : $\boxed{\text{La courbe } \mathscr{D}_1 \text{ présente deux points singuliers, pour } t = 0 \text{ et } t = t_0 = \dfrac{2\pi}{3}.}$

3) $\begin{cases} x''(t) = 2\cos(t) + 4\cos(2t) \\ y''(t) = -2\sin(t) + 4\sin(2t) \end{cases}$ donc la tangente en O est portée par $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en I par $\begin{pmatrix} -3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Les tangentes ont par conséquent pour équation $\boxed{y = 0}$ et $\boxed{y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}}$.

Ces deux points sont des points de rebroussement ($p = 2$ pair), et par symétrie par rapport à (Ox), $\boxed{O \text{ est forcément un point de rebroussement de première espèce}}$ *(si vous ne vous souvenez plus de la nomenclature, faire un petit dessin)*. La courbe sera au-dessus de la tangente ($y > 0$ pour $t > 0$ au voisinage de 0).

En I, on calcule : $\begin{cases} x^{(3)}(t) = -2\sin(t) - 8\sin(2t) \\ y^{(3)}(t) = -2\cos(t) + 8\cos(2t) \end{cases}$ et ce qui donne $\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$ en $t = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur tangent (déterminant $= 36 \neq 0$), par conséquent $\boxed{I \text{ est aussi un point de rebroussement de première espèce.}}$

La courbe arrive au-dessus de la tangente, et repars au-dessous.

En $t = 0$ on pouvait aussi raisonner par parité : x est paire et y impaire, donc dans le DL en 0, x n'a que des puissances paires et y des puissances impaires. Les $f^{(k)}(0)$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$ pour k pair et $\begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$ pour k impair. On aura donc (pair,impair) ou (impair, pair).

4) **a)** $\sqrt{3}x_\Omega - 3\sqrt{3} = 0 = y_\Omega$, donc $\boxed{\Omega \in T}$

b) Soit $M \in \mathscr{D}$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ ($t \in [-\pi, \pi]$). Comme

$$M \in \mathscr{C}_1 \iff (x(t) - 3)^2 + (y(t))^2 = 3^2 = 9$$

et que

$$\begin{aligned} (x(t) - 3)^2 + (y(t))^2 &= (-2\cos(t) - \cos(2t))^2 + (2\sin(t) - \sin(2t))^2 \\ &= 4 + 1 + 4\cos(2t)\cos(t) - 4\sin(2t)\sin(t) \\ &= 5 + 4\cos(3t) \end{aligned}$$

Donc $M \in \mathscr{C}_1 \iff \cos(3t) = 1$, c'est-à-dire $t = 0$ ou $t = \pm\dfrac{2\pi}{3}$. En conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D} \cap \mathscr{C}_1 \text{ est constitué du point } O\text{, du point } I \text{ et du symétrique de } I \text{ par rapport à } (Ox).}$$

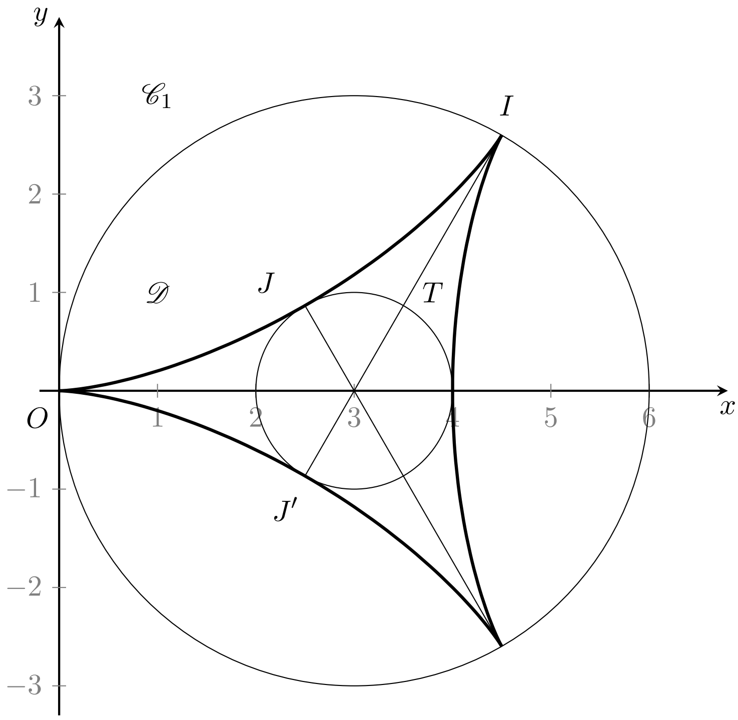
c) Le point J a pour coordonnées $\left(3 - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, donc $\Omega J^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, et $J \in \mathscr{C}_2$.
La courbe $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}_2$ au point J si les tangentes de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_2$ sont confondues. Comme $J \in \mathscr{D} \cap \mathscr{C}_2$, et que le rayon du cercle est normal au cercle, calculons

$$\overrightarrow{\Omega J}.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Donc (ΩJ) est perpendiculaire à la tangente en J à $\mathscr{D}$:

$$\boxed{\mathscr{D} \text{ est tangente à } \mathscr{C}_2 \text{ au point } J.}$$

5) Tracé dans $\mathscr{P}$ des courbes $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et T. On remarque que $-\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ modulo π, donc que T est normale à $\mathscr{D}$ au point $J'(-\pi/3)$



6) Un rotation s'exprime de façon simple dans $\mathbb{C}$: la rotation d'angle θ de centre O correspond à la transformation $z \mapsto ze^{i\theta}$, et donc celle de centre Ω correspond à

$$z \mapsto (z - z_\Omega)e^{i\theta} + z_\Omega$$

Il reste donc à exprimer l'affixe du point $M(t)$:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = 3 + 2(-\cos(t) + \sin(t)) - e^{2it} = 3 - 2e^{-it} - e^{2it}$$

On peut s'aider d'un cercle trigo pour la dernière égalité...

L'image de $M(t)$ par la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ a pour affixe

$$z' = (z(t) - 3)e^{\frac{2i\pi}{3}} + 3 = 2e^{-it+\frac{2i\pi}{3}} - e^{2it+\frac{2i\pi}{3}} + 3 = 3 + 2e^{-i\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)} - e^{2i\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)} = z\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Car $+\frac{2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}[\pi]$. Donc $r(M(t)) = M\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) \in \mathscr{D}$:

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{D} \text{ est invariante par la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angles } \frac{2\pi}{3}.}$$

On aurait pu faire l'ensemble de l'exercice avec des affixes complexes, les calculs aurait été plus simples !

7) L'invariance par rotation nous donne $L(\mathscr{D}) = 3\displaystyle\int_0^{2\pi/3} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$

Or $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2} = |z'(t)| = |2e^{-it} - 2e^{2it}| = 4\left|\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right)\right|$. Comme $\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right) \geqslant 0$ sur $[0, 2\pi/3]$,

$$L(\mathscr{D}) = 3\int_0^{2\pi/3} 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 8\left[-\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]_0^{2\pi/3} = \boxed{16}$$

Exercice 2 (PT 2006 — Partie A)

1) L'ensemble des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 6$ est une ellipse de foyers F et F', le grand axe est donc porté par $(O, \overrightarrow{\imath})$, la longueur du demi grand axe est 3, le petit axe est porté par $(O, \overrightarrow{\jmath})$, la longueur du demi petit axe est $\sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{4} = 2$

Précisons une directrice et l'excentricité. Prenons par exemple la directrice associée au foyer F.

Soit (D) cette directrice d'équation : $x = h$.

Soit A et A' les sommets du grand axe : $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$ et H la projection orthogonale de A et A' sur (D). On a : $AF = eAH$ et $A'F = eA'H$ et donc aussi : $\dfrac{AF}{AH} = \dfrac{A'F}{AH}$.

Ceci se traduit par : $e = \dfrac{3-\sqrt{5}}{h-3} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{h+3}$ ce qui donne :

$$h\left((3+\sqrt{5}) - (3-\sqrt{5})\right) = \left((3-\sqrt{5}) + (3+\sqrt{5})\right)$$

soit $h = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$ et $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Ellipse de foyers } F \text{ et } F'\text{, de sommets } A(3,0),\ A'(-3,0) \text{ et } B(0,2),\ B'(0,-2).\\ \text{Directrices les droites d'équation : } x = \dfrac{9}{\sqrt{5}} \text{ et } x = -\dfrac{9}{\sqrt{5}}.\ \text{Excentricité : } e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{array}}$

2) Une équation cartésienne de $\mathscr{E}$ est $\boxed{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1}$.

3) <u>Repère de Frenet</u> : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix}-3\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}$, par conséquent $\boxed{s'(t) = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}}$.

Par suite

$$\boxed{\begin{array}{l}\bullet\ \overrightarrow{T} = \dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}}\begin{pmatrix}-3\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}\\ \bullet\ \overrightarrow{N} = -\dfrac{1}{\sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}}\begin{pmatrix}2\cos t\\ 3\sin t\end{pmatrix}\end{array}}$$

<u>Rayon de courbure</u> : On calcule la première composante de $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}.\overrightarrow{\imath} &= \frac{-3}{\sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}}\left(\frac{(9\cos t\sin t - 4\sin t\cos t)\sin t - (9\sin^2 t + 4\cos^2 t)\cos t}{(9\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}}\right)\\ &= \frac{-3\cos t}{\sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}}\left(\frac{9\sin^2 t - 4\sin^2 t - 9\sin^2 t - 4\cos^2 t}{(9\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}}\right)\\ &= \frac{-2\cos t}{\sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}}\left(\frac{6}{(9\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}}\right)\\ &= \left(\frac{6}{(9\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}}\right)\overrightarrow{N}.\overrightarrow{\imath}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{R = \dfrac{(9\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}}{6}}$

4) Par définition du centre de courbure,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} \\
&= \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} + \frac{(9\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}}{6} \frac{-1}{\sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}} \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(9\sin^2 t + 4\cos^2 t) \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\cos t}{3}(9 - 9\sin^2 t - 4\cos^2 t) \\ \dfrac{\sin t}{2}(4 - 9\sin^2 t - 4\cos^2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos t}{3}(5\cos^2 t) \\ \dfrac{\sin t}{2}(-5\sin^2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3}\cos^3 t \\ -\dfrac{5}{2}\sin^3 t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{Les coordonnées du centre de courbure sont } (\frac{5}{3}\cos^3 t, -\frac{5}{2}\sin^3 t).}$

5) Variations de x et y : $x'(t) = -5\cos^2 t \sin t$ et $y'(t) = -\dfrac{15}{2}\sin^2 t \cos t$

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	0
x	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	0
y	0	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$
$y'(t)$	0	$-$	0

Les deux dérivées s'annulent en $t = 0$ et $t = \dfrac{\pi}{2}$, donc il faut dériver à l'ordre suivant :

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\cos t \sin^2 t - 5\cos^3 t \\ -15\sin t \cos^2 t + \dfrac{15}{2}\sin^3 t \end{pmatrix} \quad \text{en } t = 0 \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et en } t = \frac{\pi}{2} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{\text{La courbe } \Gamma' \text{ admet une tangente horizontale en } M(0) \text{ et verticale en } M(\pi/2).}$

6) La périodicité de x et y permet de se restreindre à un intervalle de longueur 2π.
Les points $M(t+\pi)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à O, on se restreint à un intervalle de longueur π, par exemple $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à (Oy), donc on peut se restreindre à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$\boxed{\text{On déduit } \Gamma \text{ de } \Gamma' \text{ par une symétrie par rapport à } (Ox)\text{, suivi d'une symétrie de centre } O \text{ de la courbe obtenue.}}$

```
> restart : with(plots) :
> E : = plot ( [3*cos(t),2*sin(t),t = 0..2*Pi],color=black) :
> DevE : = plot( [5/3*cos(t)^3,-5/2*sin(t)^3,t=0..2*Pi],color=black) :
> F1 : = plot([evalf(sqrt(5)),t,t=-0.1..0.1],color=black) :
> F2 : = plot([evalf(-sqrt(5)),t,t=-0.1..0.1],color=black) :
> normales : = {seq(plot([[3*cos(k*Pi/20), 2*sin(k*Pi/20)], [5/3*cos(k*Pi/20)^3,-
5/2*sin(k*Pi/20)^3]] ,color=red),k=0..10)} :
> Ox : = plot([t,0,t =-3.5..3.5],color=black) :
> Oy : = plot([0,t,t =-3.0..3.0],color=black) :
> display({E,DevE,F1,F2,Ox,Oy} union normales,scaling=constrained) ;
```

Exercice 3 (E3A MP 2012)

1) Il faut évidemment faire un dessin.

a) $[OB]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$ et $N_t \in \mathscr{C}$ donc $\boxed{\text{Le triangle } ON_tB \text{ est rectangle en } N_t.}$

b) $\mathscr{C}$ est le cercle de centre le milieu de $[OB]$ et de rayon $OB/2$, c'est à dire de centre de coordonnées $(0, 1/2)$ et de rayon $1/2$:

$$\boxed{\mathscr{C} : \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}} \qquad (\iff x^2 + y^2 + y = 0)$$

Équation de $\mathscr{D}'$: $\boxed{y = 1}$

c) L'équation de la droite (OM_t) est $x = ty$, donc en remplaçant dans l'équation de $\mathscr{C}$ il vient :

$$t^2y^2 + y^2 + y = 0$$

Or N_t est distinct du point O : si $y = 0$, $x = ty = 0$ et $N_t = O$, donc $y \neq 0$. On peut donc simplifier par y, et il vient $y = \dfrac{1}{1+t^2}$ puis $x = ty = \dfrac{t}{1+t^2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{le point } N_t \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)}$

d) $\overrightarrow{N_tM_t} : \begin{pmatrix} t - \dfrac{t}{1+t^2} \\ 1 - \dfrac{1}{1+t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^3}{1+t^2} \\ \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$

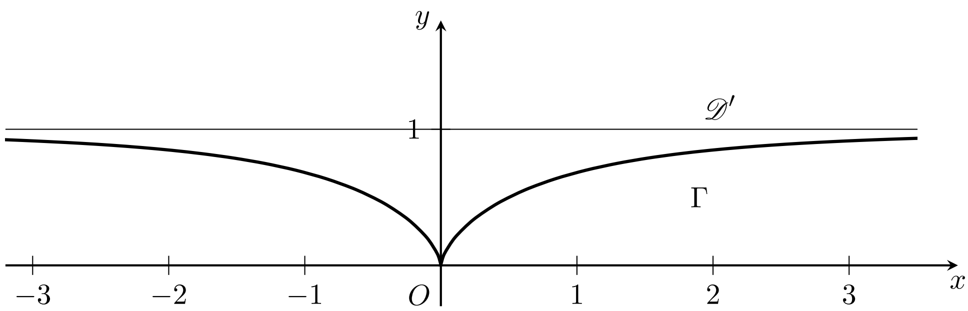
2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ non nul, on note P_t le point tel que $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{N_tM_t}$. On pose $P_0 = O$.

a) Le point P_t a pour coordonnées $\left(\dfrac{t^3}{1+t^2}, \dfrac{t^2}{1+t^2}\right)$.

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont respectivement impaires et paires, donc la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe (Oy) et il suffit d'étudier x et y sur $[0, +\infty[$.

Ce sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ et, après calcul et étude du signe des dérivée, on trouve que x et y sont strictement croissante.

De plus, $\lim\limits_{+\infty} y = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$ donc Γ admet $y = 1$ pour asymptote.



b) En 0, $x \sim t^3$ et $y \sim t^2$ donc $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3)$ et le point P_0 est un point de rebroussement de première espèce dont la tangente est l'axe (Oy).

3) **a)** Le produit scalaire s'écrit $xx' + yy' = \Re(z\overline{z'})$. Donc

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \Re\left(z\frac{1}{\overline{\overline{z}}}\right) = 1$$

b) Si $z = x(t) + iy(t) = \dfrac{(t+i)t^2}{1+t^2}$, alors $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1+t^2}{(t-i)t^2} = \dfrac{(1+t^2)(t+i)}{(1+t^2)t^2} = \dfrac{1}{t} + i\dfrac{1}{t^2}$.

Ainsi, $\boxed{U_t\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}\right)}$

c) Lorsque t parcourt $\mathbb{R}^*$, U_t parcourt la parabole d'équation $y = x^2$ privée du point O. Donc

$$\boxed{\text{L'image par } \sigma \text{ de la courbe } \Gamma \text{ est la parabole d'équation } y = x^2 \text{ privée de } O.}$$

Exercice 4

$$\rho = -1 + \cos(3\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

1) La fonction ρ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$ donc il suffit d'étudier la courbe sur $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$, le reste de la courbe s'obtenant par rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

La fonction ρ est paire, il suffit d'étudier la courbe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ le reste de la courbe s'obtenant par symétrie par rapport à (Ox).

La courbe Γ est donc laissée stable par les rotations d'angle $\dfrac{2k\pi}{3}$ (pour $k \in \{-1, 0, 1\}$) et par les symétries par rapport aux droites d'équation polaire $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$ (pour k pareil).

C'est très précisément les éléments du groupe G engendré par les deux transformations r (rotation) et s (symétrie) trouvées au début de la question : $G = \{\mathrm{id}, r, r^2, s, r\circ s, r^2 \circ s\}$.

2) Dans le repère mobile, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} = \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin(3\theta) \\ -1 + \cos(3\theta) \end{pmatrix}$ est nul en $\theta = 0$: il y a un point singulier en $M(0) = O$. Au voisinage de $\theta = 0$, *dans le repère fixe*,

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} (-1+\cos(3\theta))\cos(\theta) \\ (-1+\cos(3\theta))\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{(3\theta)^2}{2}(1 + o(\theta)) \\ -\dfrac{(3\theta)^2}{2}(\theta + o(\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ 0 \end{pmatrix} \theta^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -9/2 \end{pmatrix} \theta^3 + o(\theta^3)$$

Donc la courbe Γ a pour vecteur tangent $\begin{pmatrix} -9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en O, c'est-à-dire est tangente à l'axe $(0x)$. C'est un point de rebroussement de première espèce ($p = 2$, $q = 3$).

3) Pour $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, $\rho(\theta) \neq 0$ donc la tangente a pour vecteur directeur, dans le repère mobile,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} = \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin(3\theta) \\ -1 + \cos(3\theta) \end{pmatrix}$$

Pour $\theta \neq \dfrac{\pi}{3}$, cela correspond à une pente $\dfrac{1 - \cos(3\theta)}{3\sin\theta}$ dans le repère mobile, donc dans le repère fixe à un angle

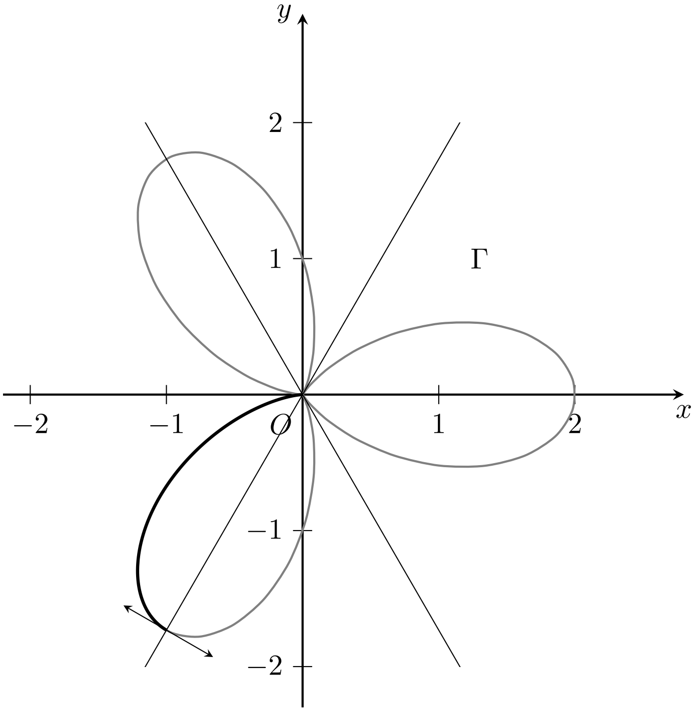
$$\boxed{\theta + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1 - \cos(3\theta)}{3\sin\theta}\right)}$$

Dans le repère mobile, au point de paramètre $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\overrightarrow{v}(\frac{\pi}{3})$.

Ainsi, dans le repère fixe, la tangente a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}(\frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, donc pour équation $\det\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & X - x(\pi/3) \\ 1/2 & Y - y(\pi/3) \end{pmatrix} = 0$ c'est-à-dire

$$\boxed{X + \sqrt{3}Y + 4 = 0}$$

4) Tracé, avec les axes de symétrie :



y
2
1
Γ
-2
-1
O
1
2
x
-1
-2