Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Soit $\mathscr{D}$ la courbe d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) &= 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

1) Soit $\mathscr{D}_1$ la partie de la courbe $\mathscr{D}$ correspondant à $t \in [0, \pi]$. Montrer que l'on obtient toute la courbe $\mathscr{D}$ à partir de $\mathscr{D}_1$: préciser clairement toutes les transformations géométriques utilisées.

2) Montrer que la courbe $\mathscr{D}_1$ présente deux points singuliers, pour $t = 0$ et $t = t_0$ que l'on déterminera. On note I le point de paramètre t_0.

3) Donner l'allure de la courbe au voisinage des points O et I : on précisera une équation des tangentes en ces points ainsi que la position de la courbe par rapport à ces tangentes.
On note T la tangente au point I.

4) Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centre $\Omega = (3, 0)$ et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.

- **a)** Vérifier que la droite T passe par Ω.
- **b)** Déterminer $\mathscr{D} \cap \mathscr{C}_1$.
- **c)** Soit J le point de $\mathscr{D}$ de paramètre $\dfrac{\pi}{3}$. Montrer que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}_2$ au point J.

5) Tracer dans $\mathscr{P}$ les courbes $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et T.

6) Montrer que la courbe $\mathscr{D}$ est invariante par la rotation de centre Ω et d'angles $\dfrac{2\pi}{3}$.

7) Calculer la longueur de $\mathscr{D}$.

Exercice 2

Soit F et F' deux points du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives $(\sqrt{5}, 0)$ et $(-\sqrt{5}, 0)$.
On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 6$.

1) Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$? Préciser ses éléments caractéristiques.

2) Former une équation cartésienne (sans radicaux) de $\mathscr{E}$.
On choisit désormais de considérer le paramétrage de $\mathscr{E}$ défini sur $[0, 2\pi[$ par :

$$x(t) = 3\cos t \qquad \text{et} \qquad y(t) = 2\sin t$$

3) Déterminer le repère de Frenet de cet arc au point $M(t)$, puis le rayon de courbure en ce point.

4) En déduire les coordonnées du centre de courbure de $\mathscr{E}$ associé au point $M(t)$.

5) On désigne par Γ l'arc paramétré comme suit ($t \in \mathbb{R}$) :

$$x(t) = \frac{5}{3}\cos^3 t \qquad \text{et} \qquad y(t) = -\frac{5}{2}\sin^3 t$$

Γ' est l'arc de Γ correspondant à $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. En étudiant les fonctions x et y, construire avec soin Γ' ; on précisera les tangentes aux extrémités de Γ'.

6) Par quelles transformations géométriques déduit-on la construction de Γ de celle de Γ' ? Construire Γ sur la même figure.

Exercice 3

Soit $\mathscr{P}$ le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Soit $\mathscr{D}$ la droite $(O, \overrightarrow{\imath})$ et $\mathscr{D}'$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{\imath}$ passant par le point $B(0,1)$ Soit $\mathscr{C}$ le cercle tangent à $\mathscr{D}$ en O et tangent à $\mathscr{D}'$ en B. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Soit M_t le point sur la droite $\mathscr{D}'$ d'abscisse t et N_t l'intersection de la droite (OM_t) et du cercle $\mathscr{C}$ autre que le point O.

- **a)** Que peut-on dire du triangle ON_tB ?
- **b)** Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ et l'équation cartésienne de la droite (OM_t).
- **c)** En déduire que le point N_t a pour coordonnées $\left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)$.
- **d)** Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N_tM_t}$?

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ non nul, on note P_t le point tel que $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{N_tM_t}$. On pose $P_0 = O$.

- **a)** Représenter la courbe Γ lieu des points P_t lorsque t parcourt $\mathbb{R}$. On précisera les éventuelles asymptotes.
- **b)** Préciser la nature du point P_0 de Γ.

3) Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\overline{z}$ son conjugué. On considère l'application σ définie sur le plan $\mathscr{P}$ privé du point O par : l'image par σ du point M d'affixe z est le point M' d'affixe $1/\overline{z}$.

- **a)** Soit M un point de $\mathscr{P}$ distinct de l'origine et soit $M' = \sigma(M)$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM}'$.
- **b)** Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les coordonnées du point U_t, image par σ du point P_t défini dans la question 2.
- **c)** Quelle est l'image par σ de la courbe Γ ?

Exercice 4

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère la courbe Γ dont une équation en coordonnées polaires est donnée par

$$\rho = -1 + \cos(3\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

1) Étudier les symétries de la courbe Γ.

2) Décrire la courbe Γ au point de paramètre $\theta = 0$.

3) Donner la pente de la tangente à la courbe au point de paramètre θ. On précisera une équation de la tangente dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ au point de paramètre $\theta = \frac{\pi}{3}$.

4) Tracer Γ.

FIN DE L'ÉPREUVE