Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1 (ATS 2016)

1) Par définition,

$$\begin{aligned}
P(x,y) \in (BN) &\iff \overrightarrow{BP} \text{ et } \overrightarrow{BN} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff \det(\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BN}) = \begin{vmatrix} x+1 & t+1 \\ y+1 & -t+1 \end{vmatrix} = 0\\
&\iff (x+1)(-t+1)-(y+1)(t+1)=0\\
&\iff (-t+1)x-t+1-(t+1)y-t-1=0\\
&\iff (-t+1)x-(t+1)y=2t
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Une équation cartésienne de la droite } (BN) \text{ est } (-t+1)x-(t+1)y=2t}$

2) Le vecteur $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} t-1 \\ -t-1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal et $A \in \Delta$, donc

$$\begin{aligned}
P(x,y) \in \Delta &\iff \overrightarrow{AP} \text{ et } \overrightarrow{AN} \text{ sont orthogonaux}\\
&\iff \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t-1 \\ -t-1 \end{pmatrix} = 0\\
&\iff (x-1)(t-1)+(y-1)(-t-1)=0\\
&\iff (t-1)x-t+1-(t+1)y+t+1=0\\
&\iff (t-1)x-(t+1)y=-2
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Une équation cartésienne de la droite } \Delta \text{ est } (t-1)x-(t+1)y=-2}$

3) Les droites (BN) et Δ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux[1] sont colinéaires.

$$(BN) \mathbin{/\!\!/} \Delta \iff \begin{vmatrix} t-1 & -t+1 \\ -(t+1) & -(t+1) \end{vmatrix} = -(t+1)\begin{vmatrix} t-1 & -t+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(t+1)(t-1)=0$$

$\boxed{\text{Les droites } (BN) \text{ et } \Delta \text{ sont parallèles si et seulement si } t=1 \text{ ou } t=-1}$

4) Soit $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Les droites (BN) et Δ ne sont pas parallèle d'après 3), donc elles sont sécantes.

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in (BN)\cap\Delta &\iff \begin{cases} (-t+1)x-(t+1)y &= 2t \\ (t-1)x-(t+1)y &= -2 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} (-t+1)x-(t+1)y &= 2t \\ -2(t+1)y &= 2t-2 \qquad (L_2 \leftarrow L_2+L_1) \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{t+1}{-t+1}y+\dfrac{2t}{-t+1} = 1+\dfrac{2t}{-t+1} = \dfrac{t+1}{-t+1} & (\text{car } t \neq 1) \\ y = \dfrac{-t+1}{t+1} & (\text{car } t \neq -1) \end{cases}
\end{aligned}$$

---

1. Ou les vecteurs directeurs, ce qui est plus naturel et équivalent, mais nécessite un passage de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vers $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

$$\boxed{M \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{t+1}{-t+1}, \frac{-t+1}{t+1}\right)}$$

5) Étude de Γ.

a) La fonction x est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et y sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

$$x(t) = \frac{t-1+1+1}{-t+1} = -1 + 2(-t+1)^{-1} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{-t-1+1+1}{t+1} = -1 + 2(t+1)^{-1}$$

Donc

$$x'(t) = 2(-t+1)^{-2} > 0 \qquad \text{et} \qquad y'(t) = -2(t+1)^{-2} < 0$$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	‖	$+$	
x	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1
$y'(t)$		$-$	‖	$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

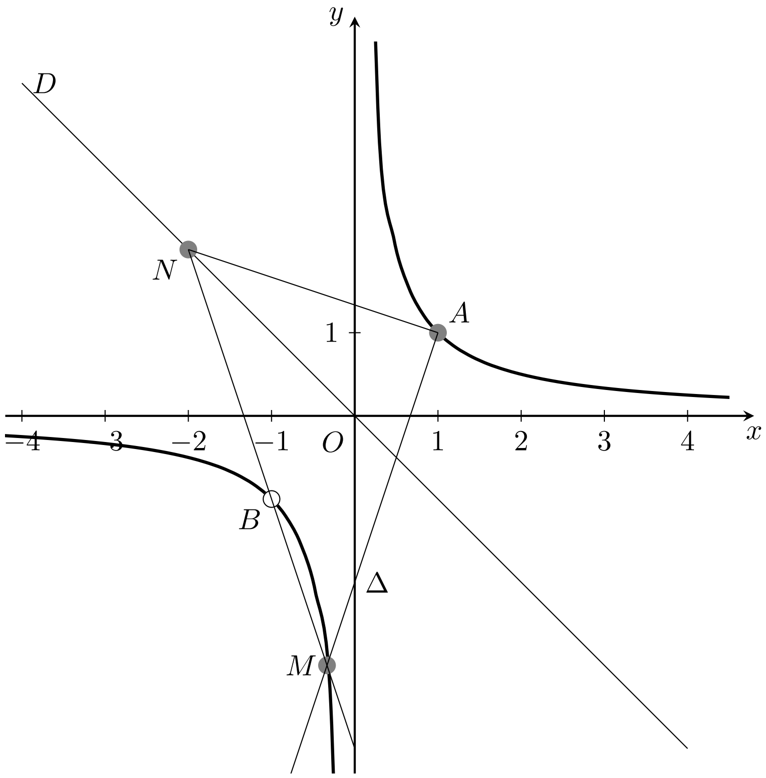
c) <u>Branches infinies en $t = 1$</u> : Lorsque $t \to 1^+$, $\lim\limits_{t \to 1^+} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to 1^+} y(t) = 0$.
Donc Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
De même pour $t \to 1^-$: $\lim\limits_{t \to 1^-} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to 1^-} y(t) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\Gamma \text{ admet une asymptote d'équation } y = 0 \text{ lorsque } t \to 1^+ \text{ et } t \to 1^-}$

<u>Branches infinies en $t = -1$</u> : Lorsque $t \to -1^+$, $\lim\limits_{t \to -1^+} y(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to -1^+} x(t) = 0$.
Donc Γ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
De même pour $t \to -1^-$: $\lim\limits_{t \to -1^-} y(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to -1^-} x(t) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\Gamma \text{ admet une asymptote d'équation } x = 0 \text{ lorsque } t \to -1^+ \text{ et } t \to -1^-}$

d)



6) **a)** $\boxed{\text{Le point } A \text{ appartient à } \Gamma\text{, il a pour paramètre } t = 0}$

b) Le point B a pour coordonnées $(-1,-1)$, or $x = -1$ n'est jamais atteint (c'est un point limite, lorsque $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$). Donc

$\boxed{\text{Le point } B \text{ n'appartient pas à } \Gamma}$

7) **a)** Pour tout $t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

$$x(t)y(t) = \frac{t+1}{-t+1} \times \frac{-t+1}{t+1} = 1$$

Donc $\boxed{xy = 1}$

b) Soit $(x, y)\mathbb{R}^2$. Si $xy = 1$, alors $x \neq 0$, donc $y = \dfrac{1}{x}$.

Ainsi, d'après 7)a), si $M(x(t), y(t)) \in \Gamma$, alors $y(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ donc $M \in \mathcal{H}$:

$$\Gamma \subset \mathcal{H}$$

La réciproque n'est pas vraie : $B \in \mathcal{H}$ mais $B \notin \Gamma$ d'après 6)b). Donc, en particulier, $\Gamma \subset \mathcal{H} - \{B\}$.
Plus précisément, montrons que $\Gamma = \mathcal{H} - \{B\}$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{H} - \{B\}$.
Comme $x \neq -1$, posons $t = \dfrac{x-1}{x+1}$. Alors $x = \dfrac{t+1}{-t+1}$ et $y = \dfrac{1}{x} = y(t)$. Donc $M \in \Gamma$.
Conclusion : $\boxed{\Gamma = \mathcal{H} - \{B\}}$

Exercice 2 (PT 2008 B)

1) **a)** Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(-t) = 2\,\mathrm{ch}\,(t) = x(t) \qquad \text{et} \qquad y(-t) = -3\,\mathrm{sh}\,(t) = -y(t)$$

Conclusion : $\boxed{\text{La courbe } \Gamma \text{ est symétrique par rapport à } (Ox)}$
On donc étudiera les variations de x et y pour $t \in \mathbb{R}_+$.
Les fonctions x et y sont dérivables, et $x'(t) = 2\,\mathrm{sh}\,(t)$, $y'(t) = 3\,\mathrm{ch}\,(t)$. Ainsi,

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
x	2	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	
y	0	↗	$+\infty$

b) Pour $t \to +\infty$, Γ possède une branche infinie.

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{3}{2}\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \sim \frac{3}{2}\frac{e^t}{e^t} = \frac{3}{2}$$

De plus $y(t) - \frac{3}{2}x(t) = 3(\operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t)) = -3e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Donc $\boxed{\Gamma \text{ admet une asymptote d'équation } y = \frac{3}{2}x \text{ lorsque } x \text{ et } y \to +\infty}$

Par symétrie, $\boxed{\Gamma \text{ admet une asymptote d'équation } y = \frac{3}{2}x \text{ lorsque } x \to +\infty \text{ et } y \to -\infty}$

c) $s'(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \boxed{\boxed{\sqrt{4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)}}}$

La courbe est régulière : $s'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Donc $\boxed{\overrightarrow{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)}}\begin{pmatrix} 2\operatorname{sh}(t) \\ 3\operatorname{ch}(t)\end{pmatrix}}$ puis $\boxed{\overrightarrow{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)}}\begin{pmatrix} 3\operatorname{ch}(t) \\ 2\operatorname{sh}(t)\end{pmatrix}}$

d) Formule de Frenet : $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = s'(t)\gamma(t)\overrightarrow{N} = \gamma(t)\begin{pmatrix} -3\operatorname{ch}(t) \\ 2\operatorname{sh}(t)\end{pmatrix}$ (1).

Nous allons avoir besoin de

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)}}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\big(\sqrt{4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)}\big)^{-1/2}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}(8\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t) + 18\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t))\big[s'(t)\big]^{-3} \\
&= -\frac{13\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)}{\big[s'(t)\big]^3}
\end{aligned}$$

Le calcul la coordonnée selon x de $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}.\overrightarrow{i} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)}} \times 2\operatorname{sh}(t)\right) \\
&= \frac{2\operatorname{ch}(t)\Big(4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)\Big) - 2\operatorname{sh}(t)\Big(13\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)\Big)}{\big[s'(t)\big]^3}
\end{aligned}$$

Or $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ donc $\operatorname{ch}^2 = 1 + \operatorname{sh}^2$ puis $4\operatorname{sh}^2 + 9\operatorname{ch}^2 = 9 + 13\operatorname{sh}^2$.

$$\begin{aligned} &= 2\,\frac{9\operatorname{ch}(t) + 13\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}^2(t) - 13\operatorname{sh}^2(t)\operatorname{ch}(t)}{\left[s'(t)\right]^3} \\ &= \frac{18\operatorname{ch}(t)}{\left[s'(t)\right]^3} \end{aligned}$$

Donc l'équation (1) selon la première coordonnée s'écrit $\dfrac{18\operatorname{ch}(t)}{\left[s'(t)\right]^3} = \gamma(t)(-3\operatorname{ch}(t))$.

D'où $\gamma(t) = -\dfrac{6}{\left[s'(t)\right]^3}$.

Puis, comme $\gamma(t) \neq 0$ (donc la courbe est birégulière) et $R = \dfrac{1}{\gamma}$, il vient

$$\boxed{R(t) = -\frac{1}{6}\left[s'(t)\right]^3 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt{4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)}\right)^{3/2}}$$

- *La recherche d'un α est a priori sans espoir, vu qu'il n'y a ni* cos *ni* sin *à l'horizon.*
- *Dans ce genre de situation, il est plus que probable que la courbe des points $C(t)$ que l'on étudie au 2) soit justement celle du centre de courbure ($C(t)$!) qu'il faut trouver.*
- *Si les calculs s'enlisent, vu que cette question ne vous bloque pas pour la suite, contentez-vous de citer les formules (ça prend peu de temps) : formule de Frenet, et formule définissant le centre de courbure.*

e) Par définition, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 2\operatorname{ch}(t) \\ 3\operatorname{sh}(t) \end{pmatrix} - \dfrac{1}{6}\left[s'(t)\right]^2 \begin{pmatrix} -3\operatorname{ch}(t) \\ 2\operatorname{sh}(t) \end{pmatrix}$.

Si on note $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ les coordonnées de C, il vient

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(t) &= 2\operatorname{ch}(t) + \frac{1}{6}\Big(4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)\Big) \times 3\operatorname{ch}(t) \\ &= 2\operatorname{ch}(t) + \frac{1}{2}\Big(-4 + 13\operatorname{ch}^2(t)\Big)\operatorname{ch}(t) \\ &= \frac{13}{2}\operatorname{ch}^3(t) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(t) &= 3\operatorname{sh}(t) + \frac{1}{6}\Big(4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)\Big) \times 2\operatorname{sh}(t) \\ &= 2\operatorname{sh}(t) + \frac{1}{3}\Big(13\operatorname{sh}^2(t) + 9\Big)\operatorname{sh}(t) \\ &= -\frac{13}{3}\operatorname{sh}^3(t) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x(t) &=& \dfrac{13}{2}\operatorname{ch}^3(t) \\ y(t) &=& -\dfrac{13}{3}\operatorname{sh}^3(t) \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}}$$

C'est une courbe de Lamé.

2) a) En utilisant la parité des fonctions hyperboliques, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(-t) = x(t) \qquad \text{et} \qquad y(-t) = -\frac{13}{3}(-\operatorname{sh}(t))^3 = -y(t)$$

Ainsi, $\boxed{\Gamma' \text{ est symétrique par rapport à } (Oy)}$

b) Dérivons x et y : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = \frac{13}{2}(3\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}^2(t)) \qquad \text{et} \qquad y'(t) = -\frac{13}{3}(3\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{sh}^2(t))$$

Donc en $t = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$: le point $C(0)$ est un point singulier de Γ'. On effectue les développements limités de x et y à l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{13}{2}\left(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right)^3 = \frac{13}{2} + \frac{39}{4}t^2 + o(t^3) \\ y(t) &\sim -\frac{13}{3}t^3 \end{aligned}$$

(pour y', un équivalent nous donne un DL à l'ordre 3) Par identification, il vient :

$$\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{39}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x'''(0) \\ y'''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs forment une famille libre : $p = 2$ et $q = 3$.

Conclusion : $\boxed{\text{La courbe } \Gamma' \text{ possède un point de rebroussement de première espèce en } t = 0.}$

c) Au voisinage de $+\infty$: $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} y = -\infty$. De plus, au voisinage de $+\infty$,

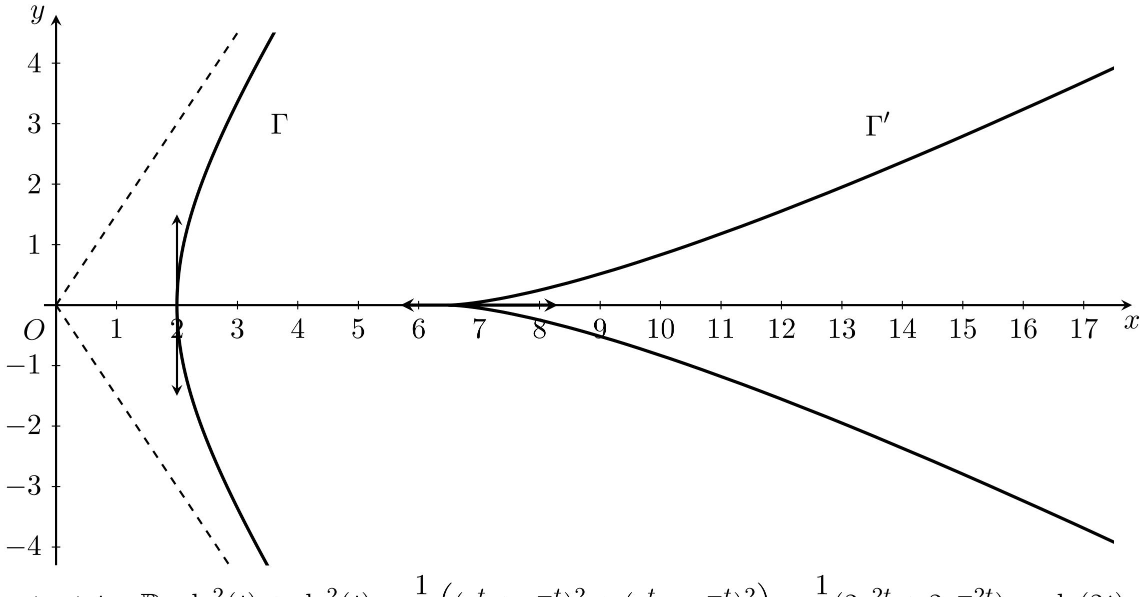
$$\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{sh}\,(t)}{\mathrm{ch}\,(t)}\right)^3 \sim -\frac{2}{3}\left(\frac{e^t}{e^t}\right)^3 = -\frac{2}{3}$$

$$y(t) + \frac{2}{3}x(t) = \frac{13}{3}(-\mathrm{sh}^3(t) + \mathrm{ch}^3(t)) = \frac{13}{3}\left(-\frac{e^{3t} - 3e^t + o(e^t)}{8} + \frac{e^{3t} + 3e^t + o(e^t)}{8}\right) \sim \frac{13}{8}e^t$$

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) + \frac{2}{3}x(t) = +\infty$: Γ' possède une branche parabolique de direction $y = -\frac{2}{3}x$.

Par symétrie de Γ', $\boxed{\begin{array}{l}\text{La courbe } \Gamma' \text{ possède deux branches paraboliques de directions } y = -\frac{2}{3}x \\ \text{(pour } t \to +\infty) \text{ et } y = \frac{2}{3}x \text{ (pour } t \to -\infty), \text{ orthogonales aux directions} \\ \text{des asymptotes de } \Gamma.\end{array}}$

d) Tracé (on ne voit pas bien les directions parabolique, pour des raisons d'échelle) :



e) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(t) + \mathrm{sh}^2(t) = \frac{1}{4}\left((e^t + e^{-t})^2 + (e^t - e^{-t})^2\right) = \frac{1}{4}(2e^{2t} + 2e^{-2t}) = \mathrm{ch}\,(2t)$

De plus $\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = (\mathrm{ch}\,(t) - \mathrm{sh}\,(t))(\mathrm{ch}\,(t) + \mathrm{sh}\,(t)) = e^{-t}e^t = 1$, d'où l'on déduit les deux égalités suivantes. La dernière s'obtient en développant $\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t)$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}\,(2t) &=& \mathrm{ch}^2(t)+\mathrm{sh}^2(t) = 2\,\mathrm{ch}^2(t)-1 = 2\,\mathrm{sh}^2(t)+1 \\ \mathrm{sh}\,(2t) &=& 2\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t) \end{array}}$$

D'après 2b, $\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}\|^2 = \dfrac{13^2}{4}(9\,\mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{ch}^4(t)+4\,\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{sh}^4(t)) = \dfrac{13^2}{4}\,\mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{ch}^2(t)(9\,\mathrm{ch}^2(t)+4\,\mathrm{sh}^2(t))$.
Ainsi, pour tout $t\in[0,1]$ (donc $\mathrm{sh}\,(t)\geqslant 0$), en exprimant $\mathrm{sh}^2(t)$ et $\mathrm{ch}^2(t)$ en fonction de $\mathrm{ch}\,(2t)$,

$$\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}\| = \frac{13}{2}\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t)\sqrt{\frac{9}{2}(\mathrm{ch}\,(2t)+1)+2(\mathrm{ch}\,(2t)-1)} = \frac{13}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,(2t)\sqrt{13\,\mathrm{ch}\,(2t)+5}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Puis : } \displaystyle\int_0^1 \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}\|\,\mathrm{d}t &=& \displaystyle\int_0^1 \frac{13}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,(2t)\sqrt{13\,\mathrm{ch}\,(2t)+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^1 13(2\,\mathrm{sh}\,(2t))\sqrt{13\,\mathrm{ch}\,(2t)+5}\,\mathrm{d}t \\ &=& \displaystyle\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_{18}^{13\,\mathrm{ch}\,(2)+5}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(en posant } u = 13\,\mathrm{ch}\,(2t)+5) \\ &=& \displaystyle\frac{(13\,\mathrm{ch}\,(2)+5)^{3/2}-18^{3/2}}{12\sqrt{2}} \end{array}$$

Exercice 3 (Cardioïde)

1) Un vecteur normal à la tangente en $M_{\mathscr{C}}$ au cercle de centre O est le vecteur $\overrightarrow{OM_{\mathscr{C}}}\begin{pmatrix}2\cos t\\ 2\sin t\end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} P(x,y)\in\mathcal{T}_t &\iff& \overrightarrow{M_{\mathscr{C}}P} \text{ et } \overrightarrow{OM_{\mathscr{C}}} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff& \overrightarrow{M_{\mathscr{C}}P}.\overrightarrow{OM_{\mathscr{C}}} = \begin{pmatrix}x-2\cos t\\ y-2\sin t\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\cos t\\ 2\sin t\end{pmatrix} = 2(x\cos t - 2\cos^2 t + y\sin t - 2\sin^2 t) = 0 \\ &\iff& x\cos t + y\sin t = 2 \end{array}$$

Ainsi, une équation de la tangente $\mathcal{T}_t$ à $\mathscr{C}$ en au point $M_{\mathscr{C}}$ est $\boxed{x\cos t + y\sin t = 2}$

2) Soit $t\in]0,2\pi[$. Le point M appartient à $\mathcal{T}_y$ et à la droite $\mathscr{D}_t$ passant par P orthogonale à $\mathcal{T}_t$.
Cette droite $\mathscr{D}_t$ a donc pour vecteur directeur un vecteur normal de $\mathcal{T}_t$, par exemple $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} M(x,y)\in\mathscr{D}_t &\iff& \overrightarrow{PM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont colinéaires.} \\ &\iff& \det(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{n}) = \begin{vmatrix} x-1 & \cos t \\ y & \sin t\end{vmatrix} = 0 \\ &\iff& x\sin t - y\cos t = \sin t \end{array}$$

Par conséquent, lorsque $\mathcal{T}_t$ et $\mathscr{D}_t$ ne sont pas parallèles, $\mathscr{D}_t\cap\mathcal{T}_t = \{M\}$.

$$\begin{array}{rcl} M(x,y)\in\mathscr{D}_t\cap\mathcal{T}_t &\iff& \left\{\begin{array}{rcl} x\sin t - y\cos t &=& \sin t \\ x\cos t + y\sin t &=& 2 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow (\underbrace{\sin t}_{\neq 0})L_1 + (\cos t)L_2 \\ &\iff& \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \sin^2 t + 2\cos t \\ y\sin t &=& 2 - x\cos t = 2 - \cos t\sin^2 t - 2\cos^2 t = 2\sin^2 t - \cos t\sin^2 t \end{array}\right. \end{array}$$

Conclusion, comme $\sin t\neq 0$:

$$\boxed{x = \sin^2 t + 2\cos t \qquad \text{et} \qquad y = 2\sin t - \cos t\sin t}$$

Il y a une petite coquille lourde de conséquence : il faut prendre $P(2,0)$ sur le cercle pour obtenir, logiquement, la cardioïde...

Nous avons construit la podaire du cercle $\mathscr{C}$ par rapport au point P. Si $P\in\mathscr{C}$, cette podaire est une cardioïde.

3) Étude de Γ

a) Les fonction x et y étant 2π-périodiques, on les étudiera sur $[-\pi, \pi]$. De plus l'étude de la parité nous donne

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad \begin{cases} x(-t) = 1 + 2\cos(-t) - \cos(-2t) = x(t) \\ y(-t) = 2\sin(-t) - \sin(-2t) = -y(t) \end{cases}$$

Donc $\boxed{\Gamma \text{ est symétrique par rapport à l'axe } (Ox)}$

On étudiera x et y sur $[0, \pi]$.

b) Calcul et factorisation des dérivées. Pour tout $t \in [0, \pi]$,

$$x'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t)$$
$$y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t)$$

Factorisation de x' (bien sûr, vous connaissez vous formules de trigo – ne pas se précipiter, surtout pour la dérivée ! !) : comme il s'agit de mettre sous forme de produit, on utilise immédiatement les formules d'addition.

$$x'(t) = 2\Big(\sin(-t) + \sin(2t)\Big) = 4\sin\left(\frac{-t+2t}{2}\right)\cos\left(\frac{-t-2t}{2}\right) = 4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}$$

Factorisation de y' :

$$y'(t) = 2\Big(-\cos(2t) + \cos(t)\Big) = 4\sin\left(\frac{2t+t}{2}\right)\sin\left(\frac{2t-t}{2}\right) = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}$$

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$\cos(3t/2)$		$+$	0	$-$		$-$	0
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
x	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-2
$\sin(3t/2)$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

c) Pour $t = 0$, $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $P = M(0)$, de coordonnées $(2, 0)$, est un point singulier. Effectuons un DL au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + 2\cos t - \cos(2t) \\ &= 1 + 2\Big(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}\Big) - \Big(1 - \frac{4t^2}{2} + \frac{16t^4}{4!}\Big) + o(t^5) \\ &= 3 + t^2 + \frac{7}{12}t^4 + o(t^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \\ &= 2\Big(t - \frac{t^3}{3!}\Big) - \Big(2t - \frac{8t^3}{3!}\Big) + o(t^4) \\ &= t^3 + o(t^4) \end{aligned}$$

Donc, en posant $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, au voisinage de 0 :

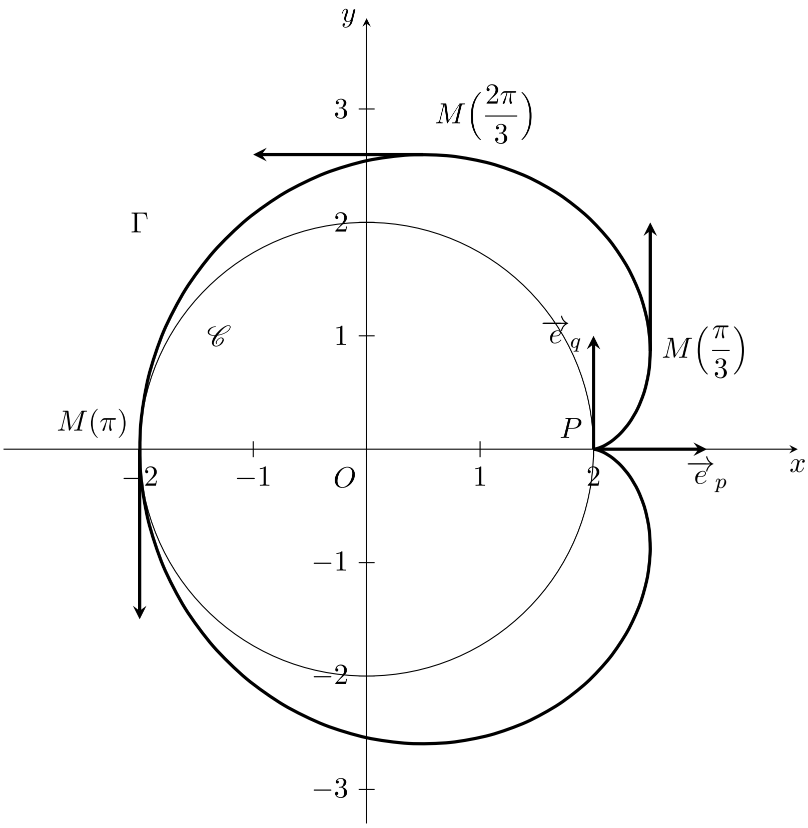
$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 7/12 \\ 0 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4)$$

Donc, comme le vecteur devant t^2 est non nul, $p = 2$. De plus, à un scalaire positif près, $\overrightarrow{e}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{e}_p$ est un vecteur tangent en P à Γ.
Et, comme le vecteur devant t^3 n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{e}_p$, $q = 3$. De plus, toujours à un scalaire positif près, $\overrightarrow{e}_q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Le point } P \text{ est un point de rebroussement de première espèce, la tangente en ce point est } (Ox) \text{ d'équation } y = 0.}$

d) On place les vecteurs $\overrightarrow{e}_p$ et $\overrightarrow{e}_q$ au point singulier, les vecteurs tangents aux points qui apparaissent dans le tableau de variations :

- $M(\pi/3)$, de coordonnées $\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et de vecteur tangent $f'(\pi/3) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha > 0$.
- $M(2\pi/3)$, de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ et de vecteur tangent $f'(2\pi/3) = \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.
- $M(\pi)$, de coordonnées $(-2, 0)$ et de vecteur tangent $f'(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \end{pmatrix}$ avec $\gamma > 0$.



4) Développée.

a) Nous écarterons le point singulier (où la normale est la droite d'équation $x = 2$). Soit $t \in]0, \pi]$. Comme $f'(t) \neq 0$, un vecteur tangent, et donc un vecteur normal à la normale, est donné, d'après

3)b), par

$$f'(t) = \begin{pmatrix} 4\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{3t}{2} \\ \\ 4\sin\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{3t}{2} \end{pmatrix} = 4\sin\frac{t}{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{3t}{2} \\ \\ \sin\dfrac{3t}{2} \end{pmatrix}$$

Vu que $\sin\dfrac{t}{2} \neq 0$, choisissons donc $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{3t}{2} \\ \\ \sin\dfrac{3t}{2} \end{pmatrix}$ comme vecteur normal, et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{3t}{2} \\ \\ \cos\dfrac{3t}{2} \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur associé.

Une équation paramétrique est alors $\lambda \mapsto M(t) + \lambda\overrightarrow{u}$, i.e.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \Big[1 + 2\cos t - \cos(2t)\Big] - \lambda\sin\dfrac{3t}{2} \\ y &=& \Big[2\sin t - \sin(2t)\Big] + \lambda\cos\dfrac{3t}{2} \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) *L'énoncé nous pousse à utiliser le résultat : la développée est l'enveloppe des normales.*

Un résultat du cours nous montre que la développée de Γ est l'enveloppe de ses normales. De plus, le théorème sur les enveloppe nous donne le paramétrage de cette enveloppe : si les droites sont paramétrées par $\lambda \mapsto M(t) + \lambda\overrightarrow{u}(t)$, et si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}') \neq 0$, alors l'enveloppe des droite a pour paramétrage

$$t \mapsto M(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t) \qquad \text{avec} \qquad \lambda(t) = -\frac{\det(\overrightarrow{OM}', \overrightarrow{u})}{\det(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{u})}$$

Vous ne sortez pas vivant des calculs qui précèdent : soit. Mais si vous connaissez vos formules, énoncez au moins le théorème ! Vous aurez au moins une partie des points.

Ici, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{3t}{2} \\ \\ \cos\dfrac{3t}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{u}' = \dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} -\cos\dfrac{3t}{2} \\ \\ -\sin\dfrac{3t}{2} \end{pmatrix}$ puis

$$\det(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{u}) = \frac{3}{2}\begin{vmatrix} -\cos\dfrac{3t}{2} & -\sin\dfrac{3t}{2} \\ -\sin\dfrac{3t}{2} & \cos\dfrac{3t}{2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \neq 0$$

Et $\overrightarrow{OM}' = f'(t) = 4\sin\dfrac{t}{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{3t}{2} \\ \\ \sin\dfrac{3t}{2} \end{pmatrix}$ donc

$$\det(\overrightarrow{OM}', \overrightarrow{u}) = 4\sin\frac{t}{2}\begin{vmatrix} \cos\dfrac{3t}{2} & -\sin\dfrac{3t}{2} \\ \sin\dfrac{3t}{2} & \cos\dfrac{3t}{2} \end{vmatrix} = 4\sin\frac{t}{2}$$

Puis $\lambda(t) = -\dfrac{\det(\overrightarrow{OM}', \overrightarrow{u})}{\det(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{u})} = \dfrac{2}{3}4\sin\dfrac{t}{2} = \dfrac{8}{3}\sin\dfrac{t}{2}$

En conclusion, en remplaçant dans le théorème et en notant $(x_C(t), y_C(t))$ les coordonnées obtenues (qui sont celles du centre de courbure),

$$\begin{array}{rcl} x_C(t) &=& 1 + 2\cos t - \cos 2t - \dfrac{8}{3}\sin\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{3t}{2} \\ &=& 1 + 2\cos t - \cos 2t - \dfrac{4}{3}\Big(-\cos(2t) + \cos t\Big) \\ &=& 1 + (2 - \dfrac{4}{3})\cos t + (-1 + \dfrac{4}{3})\cos(2t) \\ &=& 1 + \dfrac{2}{3}\cos t - \dfrac{1}{3}\cos(2t) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
y_C(t) &= 2\sin t - \sin 2t + \frac{8}{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2} \\
&= 2\sin t - \sin 2t + \frac{4}{3}\Big(\sin(2t) - \sin t\Big) \\
&= (2 - \frac{4}{3})\sin t + (-1 + \frac{4}{3})\sin(2t) \\
&= \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin(2t)
\end{aligned}
$$

Finalement : $\boxed{\begin{aligned} x_C(t) &= 1 + \frac{2}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos(2t) \\ y_C(t) &= \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin(2t) \end{aligned}}$

c) Si on effectue l'homothétie de centre O et de rapport $1/3$, Γ se transforme en

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x} &= 1/3 + \frac{2}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos(2t) \\
\widetilde{y} &= \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin(2t)
\end{aligned}
$$

Puis en effectuant une translation de rapport $\frac{2}{3}\overrightarrow{i}$, on trouve Γ'.

Autant le rapport de l'homothétie est fixé, autant il y a une liberté de choix du centre, compensée ensuite par le vecteur de la translation.

FIN DE L'ÉPREUVE