# Épreuve de Mathématiques 5

Correction

---

## Exercice 1 (PT 2008 B)

**1) a)** Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(-t) = 2\,\mathrm{ch}\,(t) = x(t) \qquad \text{et} \qquad y(-t) = -3\,\mathrm{sh}\,(t) = -y(t)$$

Conclusion : $\boxed{\text{La courbe } \Gamma \text{ est symétrique par rapport à } (Ox)}$

On donc étudiera les variations de $x$ et $y$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Les fonctions $x$ et $y$ sont dérivables, et $x'(t) = 2\,\mathrm{sh}\,(t)$, $y'(t) = 3\,\mathrm{ch}\,(t)$. Ainsi,

| $t$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | | $+$ | |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**b)** Pour $t \to +\infty$, $\Gamma$ possède une branche infinie.

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{3}{2}\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \sim \frac{3}{2}\frac{e^t}{e^t} = \frac{3}{2}$$

De plus $y(t) - \dfrac{3}{2}x(t) = 3(\mathrm{sh}\,(t) - \mathrm{ch}\,(t)) = -3e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Donc $\boxed{\Gamma \text{ admet une asymptote d'équation } y = \frac{3}{2}x \text{ lorsque } x \text{ et } y \to +\infty}$

Par symétrie, $\boxed{\Gamma \text{ admet une asymptote d'équation } y = -\frac{3}{2}x \text{ lorsque } x \to +\infty \text{ et } y \to -\infty}$

**c)** $s'(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \boxed{\boxed{\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2(t) + 9\,\mathrm{ch}^2(t)}}}$

La courbe est régulière : $s'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Donc $\boxed{\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2(t) + 9\,\mathrm{ch}^2(t)}}\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sh}\,(t) \\ 3\,\mathrm{ch}\,(t)\end{pmatrix}}$ puis $\boxed{\overrightarrow{N}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2(t) + 9\,\mathrm{ch}^2(t)}}\begin{pmatrix} -3\,\mathrm{ch}\,(t) \\ 2\,\mathrm{sh}\,(t)\end{pmatrix}}$

**d)** Formule de Frenet : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = s'(t)\gamma(t)\overrightarrow{N} = \gamma(t)\begin{pmatrix} -3\,\mathrm{ch}\,(t) \\ 2\,\mathrm{sh}\,(t)\end{pmatrix}$ (1).

Nous allons avoir besoin de

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2(t)+9\,\mathrm{ch}^2(t)}}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2(t)+9\,\mathrm{ch}^2(t)})^{-1/2}\Big)\\
&= -\frac{1}{2}(8\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t)+18\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t))\big[s'(t)\big]^{-3}\\
&= -\frac{13\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t)}{\big[s'(t)\big]^3}
\end{aligned}$$

Le calcul la coordonnée selon $x$ de $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}.\overrightarrow{i} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2(t)+9\,\mathrm{ch}^2(t)}}\times 2\,\mathrm{sh}\,(t)\right)\\
&= \frac{2\,\mathrm{ch}\,(t)\Big(4\,\mathrm{sh}^2(t)+9\,\mathrm{ch}^2(t)\Big)-2\,\mathrm{sh}\,(t)\Big(13\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t)\Big)}{\big[s'(t)\big]^3}
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2=1$ donc $\mathrm{ch}^2=1+\mathrm{sh}^2$ puis $4\,\mathrm{sh}^2+9\,\mathrm{ch}^2=9+13\,\mathrm{sh}^2$.

$$\begin{aligned}
&= 2\,\frac{9\,\mathrm{ch}\,(t)+13\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{sh}^2(t)-13\,\mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{ch}\,(t)}{\big[s'(t)\big]^3}\\
&= \frac{18\,\mathrm{ch}\,(t)}{\big[s'(t)\big]^3}
\end{aligned}$$

Donc l'équation (1) selon la première coordonnée s'écrit $\dfrac{18\,\mathrm{ch}\,(t)}{\big[s'(t)\big]^3}=\gamma(t)(-3\,\mathrm{ch}\,(t))$.

D'où $\gamma(t)=-\dfrac{6}{\big[s'(t)\big]^3}$.

Puis, comme $\gamma(t)\neq 0$ (donc la courbe est birégulière) et $R=\dfrac{1}{\gamma}$, il vient

$$\boxed{R(t)=-\frac{1}{6}\big[s'(t)\big]^3=-\frac{1}{6}\Big(\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2(t)+9\,\mathrm{ch}^2(t)}\Big)^{3/2}}$$

- *La recherche d'un $\alpha$ est a priori sans espoir, vu qu'il n'y a ni* cos *ni* sin *à l'horizon.*
- *Dans ce genre de situation, il est plus que probable que la courbe des points $C(t)$ que l'on étudie au 2) soit justement celle du centre de courbure ($C(t)$ !) qu'il faut trouver.*
- *Si les calculs s'enlisent, vu que cette question ne vous bloque pas pour la suite, contentez-vous de citer les formules (ça prend peu de temps) : formule de Frenet, et formule définissant le centre de courbure.*

**e)** Par définition, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+R\overrightarrow{N}=\begin{pmatrix}2\,\mathrm{ch}\,(t)\\3\,\mathrm{sh}\,(t)\end{pmatrix}-\dfrac{1}{6}\big[s'(t)\big]^2\begin{pmatrix}-3\,\mathrm{ch}\,(t)\\2\,\mathrm{sh}\,(t)\end{pmatrix}$.

Si on note $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ les coordonnées de $C$, il vient

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}(t) &= 2\,\mathrm{ch}\,(t)+\frac{1}{6}\Big(4\,\mathrm{sh}^2(t)+9\,\mathrm{ch}^2(t)\Big)\times 3\,\mathrm{ch}\,(t)\\
&= 2\,\mathrm{ch}\,(t)+\frac{1}{2}\Big(-4+13\,\mathrm{ch}^2(t)\Big)\,\mathrm{ch}\,(t)\\
&= \frac{13}{2}\,\mathrm{ch}^3(t)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\widetilde{y}(t) &= 3\,\mathrm{sh}\,(t) + \frac{1}{6}\Big(4\,\mathrm{sh}^{\,2}(t) + 9\,\mathrm{ch}^{\,2}(t)\Big) \times 2\,\mathrm{sh}\,(t) \\ &= 2\,\mathrm{sh}\,(t) + \frac{1}{3}\Big(13\,\mathrm{sh}^{\,2}(t) + 9\Big)\,\mathrm{sh}\,(t) \\ &= -\frac{13}{3}\,\mathrm{sh}^{\,3}(t)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{13}{2}\,\mathrm{ch}^{\,3}(t) \\ y(t) & = & -\dfrac{13}{3}\,\mathrm{sh}^{\,3}(t)\end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}}$$

C'est une courbe de Lamé.

**2)** **a)** En utilisant la parité des fonctions hyperboliques, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(-t) = x(t) \qquad \text{et} \qquad y(-t) = -\frac{13}{3}(-\,\mathrm{sh}\,(t))^3 = -y(t)$$

Ainsi, $\boxed{\Gamma' \text{ est symétrique par rapport à } (Oy)}$

**b)** Dérivons $x$ et $y$ : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = \frac{13}{2}(3\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}^{\,2}(t)) \qquad \text{et} \qquad y'(t) = -\frac{13}{3}(3\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{sh}^{\,2}(t))$$

Donc en $t = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ : le point $C(0)$ est un point singulier de $\Gamma'$. On effectue les développements limités de $x$ et $y$ à l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{13}{2}\left(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right)^3 = \frac{13}{2} + \frac{39}{4}t^2 + o(t^3) \\ y(t) &\sim -\frac{13}{3}t^3 \end{aligned}$$

*(pour $y'$, un équivalent nous donne un DL à l'ordre 3)* Par identification, il vient :

$$\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{39}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x'''(0) \\ y'''(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs forment une famille libre : $p = 2$ et $q = 3$.

Conclusion : $\boxed{\text{La courbe } \Gamma' \text{ possède un point de rebroussement de première espèce en } t = 0.}$

**c)** Au voisinage de $+\infty$ : $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} y = -\infty$. De plus, au voisinage de $+\infty$,

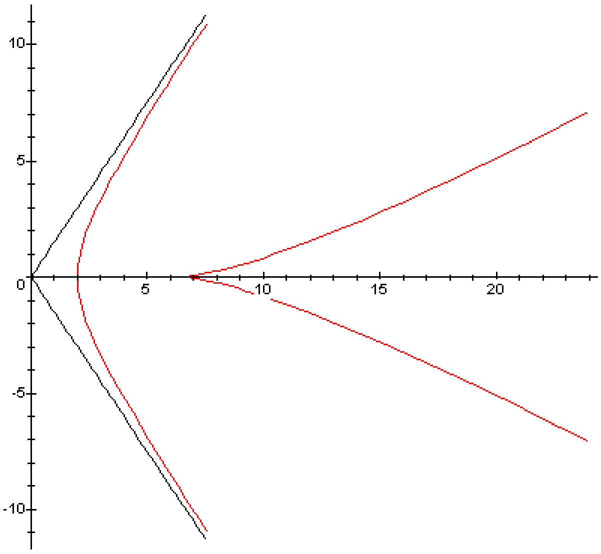
$$\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{sh}\,(t)}{\mathrm{ch}\,(t)}\right)^3 \sim -\frac{2}{3}\left(\frac{e^t}{e^t}\right)^3 = -\frac{2}{3}$$

$$y(t) + \frac{2}{3}x(t) = \frac{13}{3}(-\,\mathrm{sh}^{\,3}(t) + \mathrm{ch}^{\,3}(t)) = \frac{13}{3}\left(-\frac{e^{3t} - 3e^t + o(e^t)}{8} + \frac{e^{3t} + 3e^t + o(e^t)}{8}\right) \sim \frac{13}{8}e^t$$

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) + \dfrac{2}{3}x(t) = +\infty$ : $\Gamma'$ possède une branche parabolique de direction $y = -\dfrac{2}{3}x$.

Par symétrie de $\Gamma'$, $\boxed{\text{La courbe } \Gamma' \text{ possède deux branches paraboliques de directions } y = -\frac{2}{3}x \text{ (pour } t \to +\infty) \text{ et } y = \frac{2}{3}x \text{ (pour } t \to -\infty), \text{ orthogonales aux directions des asymptotes de } \Gamma.}$

**d)** Tracé :




**e)** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(t) + \operatorname{sh}^2(t) = \frac{1}{4}\left((e^t + e^{-t})^2 + (e^t - e^{-t})^2\right) = \frac{1}{4}(2e^{2t} + 2e^{-2t}) = \operatorname{ch}(2t)$

De plus $\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = (\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t))(\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t)) = e^{-t}e^t = 1$, d'où l'on déduit les deux égalités suivantes. La dernière s'obtient en développant $\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \operatorname{ch}(2t) & = & \operatorname{ch}^2(t) + \operatorname{sh}^2(t) = 2\operatorname{ch}^2(t) - 1 = 2\operatorname{sh}^2(t) + 1 \\ \operatorname{sh}(2t) & = & 2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t) \end{array}}$$

D'après 2b, $\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}\|^2 = \frac{13^2}{4}(9\operatorname{sh}^2(t)\operatorname{ch}^4(t) + 4\operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^4(t)) = \frac{13^2}{4}\operatorname{sh}^2(t)\operatorname{ch}^2(t)(9\operatorname{ch}^2(t) + 4\operatorname{sh}^2(t))$.
Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$ (donc $\operatorname{sh}(t) \geqslant 0$), en exprimant $\operatorname{sh}^2(t)$ et $\operatorname{ch}^2(t)$ en fonction de $\operatorname{ch}(2t)$,

$$\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}\| = \frac{13}{2}\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)\sqrt{\frac{9}{2}(\operatorname{ch}(2t)+1) + 2(\operatorname{ch}(2t)-1)} = \frac{13}{4\sqrt{2}}\operatorname{sh}(2t)\sqrt{13\operatorname{ch}(2t)+5}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Puis : } \displaystyle\int_0^1 \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}\|\,\mathrm{d}t & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{13}{4\sqrt{2}}\operatorname{sh}(2t)\sqrt{13\operatorname{ch}(2t)+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^1 13(2\operatorname{sh}(2t))\sqrt{13\operatorname{ch}(2t)+5}\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_{18}^{13\operatorname{ch}(2)+5}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u \qquad\qquad \text{(en posant } u = 13\operatorname{ch}(2t)+5\text{)} \\ & = & \displaystyle\frac{(13\operatorname{ch}(2)+5)^{3/2} - 18^{3/2}}{12\sqrt{2}} \end{array}$$

# Exercice 2 (E3A MP 2012)

**1)** Il faut évidemment faire un dessin.

**a)** $[OB]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$ et $N_t \in \mathscr{C}$ donc $\boxed{\text{Le triangle } ON_tB \text{ est rectangle en } N_t.}$

**b)** $\mathscr{C}$ est le cercle de centre le milieu de $[OB]$ et de rayon $OB/2$, c'est à dire de centre de coordonnées $(0, 1/2)$ et de rayon $1/2$ :

$$\boxed{\mathscr{C} : \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}} \qquad (\iff x^2 + y^2 + y = 0)$$

Équation de $\mathscr{D}'$ : $\boxed{y = 1}$

**c)** L'équation de la droite $(OM_t)$ est $x = ty$, donc en remplaçant dans l'équation de $\mathscr{C}$ il vient :

$$t^2y^2 + y^2 + y = 0$$

Or $N_t$ est distinct du point $O$ : si $y=0$, $x=ty=0$ et $N_t=O$, donc $y\neq 0$. On peut donc simplifier par $y$, et il vient $y=\dfrac{1}{1+t^2}$ puis $x=ty=\dfrac{t}{1+t^2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{le point } N_t \text{ a pour coordonnées } \left(\dfrac{t}{1+t^2},\dfrac{1}{1+t^2}\right)}$

**d)** $\overrightarrow{N_tM_t}$ : $\begin{pmatrix} t-\dfrac{t}{1+t^2} \\ 1-\dfrac{1}{1+t^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^3}{1+t^2} \\ \dfrac{t^2}{1+t^2}\end{pmatrix}$

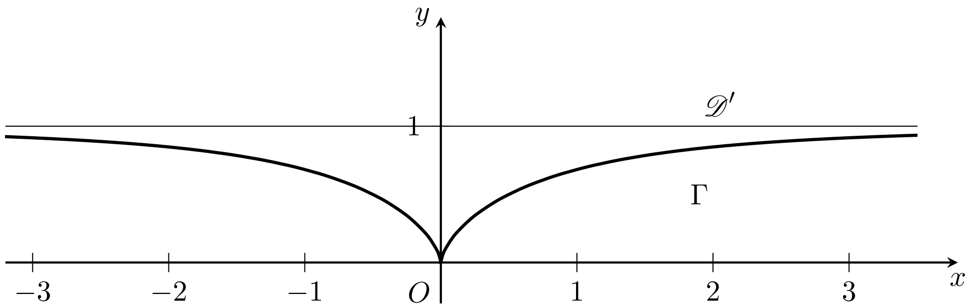
**2)** Pour tout $t\in\mathbb{R}$ non nul, on note $P_t$ le point tel que $\overrightarrow{OP_t}=\overrightarrow{N_tM_t}$. On pose $P_0=O$.

**a)** Le point $P_t$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{t^3}{1+t^2},\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)$.

Les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont respectivement impaires et paires, donc la courbe $\Gamma$ est symétrique par rapport à l'axe $(Oy)$ et il suffit d'étudier $x$ et $y$ sur $[0,+\infty[$.

Ce sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ et, après calcul et étude du signe des dérivée, on trouve que $x$ et $y$ sont strictement croissante.

De plus, $\lim\limits_{+\infty} y=1$ et $\lim\limits_{+\infty} x=+\infty$ donc $\Gamma$ admet $y=1$ pour asymptote.




**b)** En 0, $x\sim t^3$ et $y\sim t^2$ donc $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}t^3+o(t^3)$ et le point $P_0$ est un point de rebroussement de première espèce dont la tangente est l'axe $(Oy)$.

**3)** **a)** Le produit scalaire s'écrit $xx'+yy'=\Re(z\bar{z}')$. Donc

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=\Re\Big(z\frac{1}{\bar{\bar{z}}}\Big)=1$$

**b)** Si $z=x(t)+iy(t)=\dfrac{(t+i)t^2}{1+t^2}$, alors $\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1+t^2}{(t-i)t^2}=\dfrac{(1+t^2)(t+i)}{(1+t^2)t^2}=\dfrac{1}{t}+i\dfrac{1}{t^2}$.

Ainsi, $\boxed{U_t\Big(\dfrac{1}{t},\dfrac{1}{t^2}\Big)}$

**c)** Lorsque $t$ parcourt $\mathbb{R}^*$, $U_t$ parcourt la parabole d'équation $y=x^2$ privée du point $O$. Donc

$\boxed{\text{L'image par } \sigma \text{ de la courbe } \Gamma \text{ est la parabole d'équation } y=x^2 \text{ privée de } O.}$

## Exercice 3 (Concours national marocain 2010)

**1)** **a)** Si $f$ n'admet qu'une seule valeur propre $\alpha$, alors $\text{Tr } A=3\alpha=-3$ donc $\alpha=-1$, ce qui nous guide dans le calcul du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\chi_f(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 5 & 2\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 2 & -10 & -5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1+\lambda & 0\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 0 & -2(1+\lambda) & -1-\lambda\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}L_1\leftarrow L_1-L_2\\ \\ L_3\leftarrow L_3+2L_2\end{matrix}\\ &= (1+\lambda)^2\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix}=(1+\lambda)^2(4-\lambda-1-4)=-(\lambda+1)^3\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ a une seule valeur propre } \alpha = -1.}$
Si $f$ était diagonalisable, $A$ serait donc semblable à $-I_3$, et serait par conséquent déjà égal à la matrice $-I_3$ dans la base canonique. Or $A \neq -I_3$. De sorte que $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

**b)** Soit $E_{-1} = \operatorname{Ker}(f + \operatorname{id})$ le sous-espace propre de $f$ associé à la valeur propre $-1$. Or

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

$C_2 = -5C_1$ et $C_3 = -2C_1$ donc $\operatorname{rg}(A + I_3) = 1$.
D'après le théorème du rang, $\boxed{\dim E_{-1} = 3 - \operatorname{rg}(A + I_3) = 2}$

**c)** **i)** $(A + I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Donc $\varepsilon_2 = (-1, -1, 2)$. De surcroît,

$$(A + I_3)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad (A + I_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi, $\boxed{\varepsilon_2 \text{ et } \varepsilon_3 \text{ sont des éléments de } \operatorname{Ker}(f - \alpha\, \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}).}$

**ii)** Soit $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$. Comme $\det(P) = -1 \neq 0$, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B}_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ et $P$ est la matrice de passage de la base canonique à la à la base $\mathscr{B}_1$.

**2)** Par construction, $f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, et d'après la question 1)c)i., $f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$. Il vient

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

La matrice $P$ a été déterminée en 1)c)ii. [insérer ici l'inversion de $P$]. En conclusion

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = PBP^{-1}}$$

**3)** **a)** $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, par suite $\boxed{J^2 = 0}$.

**b)** D'après la question précédente, $J^2 = 0$, donc $J^i = 0$ pour tout $i \geqslant 2$. De plus, $-I$ et $J$ commutent, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le binôme de Newton s'écrit

$$B^k = (-I + J)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} J^i = (-1)^k I + (-1)^{k-1} kJ = (-1)^k (I - kJ)$$

En conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{B^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^k = PB^kP^{-1} = (-1)^k \begin{pmatrix} k+1 & -5k & -2k \\ k & -5k+1 & -2k \\ -2k & 10k & 4k+1 \end{pmatrix}}$$

*Même remarque que pour le précédent $A^n$, sauf que je l'ai vraiment fait cette fois-ci.*

**4)** **a)** Soit $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.

Le système $(S)$ équivaut alors à l'équation différentielle matricielle $X'(t) = AX(t)$.

**b)** Notons $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. $X = PY$, puisque $Y$ est le vecteur colonne de $\varphi(t)$ dans la base $\mathscr{B}_1$ et $P$ est la matrice de passage de la base canonique dans $\mathscr{B}_1$.

Par linéarité de la dérivation, $X'(t) = PY'(t)$, et il vient $PY'(t) = X'(t) = AX(t) = APY(t)$

Si bien que $Y'(t) = P^{-1}APY(t) = BY(t)$, ce qui donne le système

$$\boxed{(S_1) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & -x(t) \\ y'(t) & = & x(t) - y(t) \\ z'(t) & = & -z(t) \end{array} \right.}$$

**c)** D'après l'énoncé, $X(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\boxed{x(0) = -2,\ y(0) = 0 \text{ et } z(0) = 1.}$

**d)** La première ligne donne $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = -2e^{-t}}$ et la dernière $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad z(t) = e^{-t}}$.

L'équation en $y$ s'écrit donc $y' + y = -2e^{-t}$. Elle a pour solution homogène $t \mapsto Ce^{-t}$ et la variation de la constante s'écrit

$$C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = -2e^{-t}$$

Donc $C(t) = -2t + K$, puis $y(t) = (-2t + K)e^{-t}$. La condition initiale nous donne finalement

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = -2te^{-t}}$$

**e)** $X = PY$, donc $u = x - y + z$, $v = -y$, $w = 2y + z$. En conclusion

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} u(t) & = & (2t-1)e^{-t} \\ v(t) & = & 2te^{-t} \\ w(t) & = & (-4t+1)e^{-t} \end{array} \right.}$$

# Exercice 4 (E3A PC, B 2010)

**1)** **a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule de Moivre s'écrit

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos^3(x) + 3i\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) - i\sin^3(x)$$

Donc l'égalité des parties imaginaire s'écrit

$$\boxed{\sin(3x) = 3\sin(x)(1 - \sin^2(x)) - \sin^3(x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)}$$

**b)** **i)** Au voisinage de 0, $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + o(x) - \frac{1}{x} = -\frac{x}{6} + o(x)$$

Donc $\lim\limits_{0} f = 0$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$

**ii)** La fonction $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonction de classe $C^1$.

En $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{6}$ d'après le développement limité effectué au 1b.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - 2\sin(x) + x}{x^3} = \frac{x - x^3/2 - 2x + x^3/3 + x + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1)$$

et $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$ *(on peut aussi appliquer le théorème de prolongation $\mathscr{C}^1$ : $f$ et $f'$ ont une limite en 0)*

**2) a)** La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^3(x)}{x^2}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- Au voisinage de 0, $\dfrac{\sin^3(x)}{x^2} \sim x$, la fonction est prolongeable par continuité donc intégrable.
- Au voisinage de $+\infty$, $\left|\dfrac{\sin^3(x)}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable (Riemann), donc la fonction est intégrable.

Conclusion : $\boxed{I \text{ existe}}$

**b)** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

**i)**
- Les deux fonctions sont continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ et $[3a, +\infty[$.
  Au voisinage de $+\infty$, $\left|\dfrac{\sin(3x)}{x^2}\right|$ et $\left|\dfrac{\sin(x)}{x^2}\right|$ sont majorée par $\dfrac{1}{x^2}$, qui est intégrable. Donc $\boxed{\text{ces deux intégrales converges}}$.
- Le changement de variable $u = 3x$ dans la première intégrale nous donne

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2/9}\,\frac{\mathrm{d}u}{3} = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x}$$

**ii)** L'intégrale $I(a)$ converge (voir 2)a)). D'après 1a, $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, d'après ci-dessus,

$$4I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{x^2}\mathrm{d}x = 3\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x - 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x = 3\int_a^{3a} \varphi(x) + \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(3)$ donc

$$\boxed{I(a) = \frac{3}{4}\int_a^{3a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\ln(3)}{4}}$$

**iii)** Notons $\Phi$ une primitive de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$. Puisque $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\Phi$ est définie et continue en $x = 0$.

$$I = \lim_{a\to 0} I(a) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{3}{4}(\Phi(3a) - \Phi(a)) + \frac{\ln(3)}{4}\right) = \frac{\ln(3)}{4}$$

**FIN DE L'ÉPREUVE**