Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1) Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$:

$$\begin{cases} x(t) &= 2\,\mathrm{ch}\,(t) \\ y(t) &= 3\,\mathrm{sh}\,(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Étudier les symétries de Γ, puis les variations de x et y.

b) Former une équation cartésienne de chacune des asymptotes de Γ. Tracer proprement la courbe Γ et ses asymptotes.

c) Déterminer le repère de Frenet $(M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.

d) Déterminer le rayon de courbure $C(t)$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.

e) Déterminer une équation de la développée de Γ.

2) On note Γ' la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto C(t)$:

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{13}{2}\,\mathrm{ch}^{\,3}(t) \\ y(t) &= -\dfrac{13}{3}\,\mathrm{sh}^{\,3}(t) \end{cases}$$

a) Montrer que Γ' possède un axe de symétrie.

b) Étudier la courbe Γ' au point $C(0)$.

c) Étudier les branches infinies de Γ' et comparer leurs directions à celles des asymptotes de Γ.

d) Tracer Γ' sur la même figure que Γ.

e) Montrer les relations

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,(2t) &= \mathrm{ch}^{\,2}(t) + \mathrm{sh}^{\,2}(t) = 2\,\mathrm{ch}^{\,2}(t) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^{\,2}(t) + 1 \\ \mathrm{sh}\,(2t) &= 2\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t) \end{aligned}$$

En déduire la longueur de l'arc Γ' entre $t = 0$ et $t = 1$.

Exercice 2

Soit $\mathscr{P}$ le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Soit $\mathscr{D}$ la droite $(O, \overrightarrow{\imath})$ et $\mathscr{D}'$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{\imath}$ passant par le point $B(0, 1)$ Soit $\mathscr{C}$ le cercle tangent à $\mathscr{D}$ en O et tangent à $\mathscr{D}'$ en B. Soit $t \in \mathbb{R}$.
Soit M_t le point sur la droite $\mathscr{D}'$ d'abscisse t et N_t l'intersection de la droite (OM_t) et du cercle $\mathscr{C}$ autre que le point O.

a) Que peut-on dire du triangle ON_tB ?

b) Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ et l'équation cartésienne de la droite (OM_t).

c) En déduire que le point N_t a pour coordonnées $\left(\dfrac{t}{1+t^2}, \dfrac{1}{1+t^2}\right)$.

d) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N_tM_t}$?

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ non nul, on note P_t le point tel que $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{N_tM_t}$. On pose $P_0 = O$.

a) Représenter la courbe Γ lieu des points P_t lorsque t parcourt $\mathbb{R}$. On précisera les éventuelles asymptotes.

b) Préciser la nature du point P_0 de Γ.

3) Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\overline{z}$ son conjugué. On considère l'application σ définie sur le plan $\mathscr{P}$ privé du point O par : l'image par σ du point M d'affixe z est le point M' d'affixe $1/\overline{z}$.

a) Soit M un point de $\mathscr{P}$ distinct de l'origine et soit $M' = \sigma(M)$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM}'$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les coordonnées du point U_t, image par σ du point P_t défini dans la question 2.

c) Quelle est l'image par σ de la courbe Γ ?

Exercice 3

Dans cet exercice, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; on rappelle que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

1) **a)** Montrer que f n'admet qu'une seule valeur propre notée α. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

b) Caractériser le sous-espace propre de f associé à la valeur propre α. Quelle est sa dimension ?

c) On pose $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = (f - \alpha\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(\varepsilon_1)$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 + e_3$.

i) Montrer que ε_2 et ε_3 sont des éléments de $\mathrm{Ker}\,(f - \alpha\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

ii) Montrer que $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Écrire la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}_1$, et la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{B}_1$. Calculer P^{-1}. Exprimer A à l'aide des matrices B, P et P^{-1}.

3) On pose $J = I + B$ où I est la matrice identité d'ordre 3.

a) Calculer J^2.

b) En déduire B^k puis A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4) On considère trois fonctions u, v et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rclcrcr} u'(t) & = & -2u(t) & + & 5v(t) & + & 2w(t) \\ v'(t) & = & -u(t) & + & 4v(t) & + & 2w(t) \\ w'(t) & = & 2u(t) & - & 10v(t) & - & 5w(t) \end{array} \right.$$

a) Montrer que le système (S) équivaut à l'équation différentielle matricielle $X'(t) = AX(t)$, où $X(t)$ est un vecteur colonne que l'on précisera.

b) Si $\varphi(t) \in \mathbb{R}^3$ a pour vecteur colonne dans la base canonique $X(t)$, on écrit

$$\varphi(t) = x(t)\varepsilon_1 + y(t)\varepsilon_2 + z(t)\varepsilon_3$$

Donner le système (S_1) d'équations différentielles vérifiées par x, y et z.

c) On suppose que $u(0) = v(0) = 0$ et que $w(0) = 1$; calculer alors $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.

d) Résoudre (S_1) avec les conditions initiales trouvées à la question précédente.

e) En déduire la solution de (S) vérifiant les conditions initiales $u(0) = v(0) = 0$ et $w(0) = 1$.

Exercice 4

1) Calculs Préliminaires

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

i) Montrer que la fonction f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$, que l'on notera φ.

ii) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que I existe.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

i) Montrer, et justifier leur convergence, que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telles que

$$I(a) = C\int_a^{3a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + D$$

iii) En déduire la valeur de I.

FIN DE L'ÉPREUVE