Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1 (Centrale TSI 2013)

Partie 1

1) U est une matrice circulante : $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$u_{ij} = 1$ si $j = i - 1$ ou $(i,j) = (n,1)$, et $u_{ij} = 0$ sinon.

2) Par définition de u,

$$u(x_\omega) = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} u(e_k) = u(e_1) + \sum_{k=2}^{n} \omega^{k-1} e_{k-1} = e_n + \sum_{p=1}^{n-1} \omega^p e_p = \sum_{p=1}^{n} \omega^p e_p$$

Car $\omega^n = 1$. Ainsi, $u(x_\omega) = \sum_{k=1}^{n} \omega^k e_k = \omega x_\omega$.

Par conséquent, ω est valeur propre pour le vecteur propre $x_\omega \neq 0$.

3) Il y a n racines n-ièmes de l'unité distinctes, les $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, par exemple.

Donc il y a n vecteurs propres x_{ω_k}, qui forment une famille libre car associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Or cette famille a $n = \dim \mathbb{C}^n$ éléments, donc c'est une base de $\mathbb{C}^n$.

On pouvait aussi calculer le polynôme caractéristique et vérifier qu'il est scindé à racines simples. Puis appliquer le théorème du cours.

Dans la base de vecteurs propres $\boxed{\mathscr{B}' = (x_{\omega_0}, \dots, x_{\omega_{n-1}})}$ la matrice de u est donc diagonale :

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$$

4) Montrons que que $u^n = \mathrm{id}$.

Soit x_ω un vecteur de la base $\mathscr{B}'$ associé à la valeur propre ω, racine n-ième de l'unité. Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, $u^p(x_\omega) = \omega^p x_\omega$.

Ainsi, pour $p = n$, comme $\omega^n = 1$, il vient $u(x_\omega) = x_\omega$.

Comme u est l'identité sur une base, $\boxed{u^n = \mathrm{id}}$.

Partie 2 (Théorème de Cayley-Hamilton)

1) Le polynôme caractéristique de A est dans $\mathbb{C}[X]$. Il est donc scindé sur $\mathbb{C}$.

Or le théorème de trigonalisation nous dit que pour un endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé, il existe une base telle que la matrice associée à u soit triangulaire supérieure.

En terme matriciels, il existe une matrice T triangulaire supérieure et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ de passage telles que $A = PTP^{-1}$.

2) Par définition, $\chi_T(\lambda) = \det(T - \lambda I_n)$.
De plus, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes sur la diagonale.
Ainsi, $\boxed{\chi_T(\lambda) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)}$

3) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(PTP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = \det(P\Big(T - \lambda I_n\Big)P^{-1})$
Or $\det(MN) = \det(M)\det(N)$, donc :
$\chi_A(\lambda) = \det(P)\det\Big(T - \lambda I_n\Big)\det(P^{-1}) = \det(PP^{-1})\det\Big(T - \lambda I_n\Big) = 1 \times \chi_T(\lambda)$
Conclusion : $\boxed{\chi_T = \chi_A}$.

4) Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$,

$$(T - \lambda_i I_n)(T - \lambda_j I_n) = T^2 - (\lambda_i + \lambda_j)T + \lambda_i\lambda_j I_n = (T - \lambda_j I_n)(T - \lambda_i I_n)$$

5) Soit k un entier compris entre 1 et $n - 1$.
Par définition du produit matriciel, $TE_j = \sum i = 1^n t_{ij} E_i$
Comme T est triangulaire supérieure, $t_{ij} = 0$ pour tout $i > j$. De plus, on a noté $t_{jj} = \lambda_j$. Donc pour $j = k + 1$ la formule précédente s'écrit :

$$TE_{k+1} = \lambda_{k+1}E_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} t_{i,k+1}E_i$$

En passant $\lambda_{k+1}E_{k+1}$ dans le membre de gauche, on trouve

$$\boxed{\forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \qquad (T - \lambda_{k+1}I_n)E_{k+1} \in \mathrm{Vect}\,\{E_1, \ldots, E_k\}}$$

6) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad M_k E_i = 0$$

est vraie pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est vraie d'après 5), pour $k = 1$.
- $\underline{\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie et $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
  $M_{k+1} = M_k(T - \lambda_{k+1}I_n)$.
  Donc d'après 5), $M_{k+1}E_{k+1} = M_k((T - \lambda_{k+1}I_n)E_{k+1}) \in \mathrm{Vect}\,(M_kE_1, \ldots M_kE_k)$.
  Or d'après $\mathcal{H}_k$, $M_kE_1 = \cdots = M_kE_k = 0$. Donc $M_{k+1}E_{k+1} = 0$.
  De plus, les différents facteurs de M_{k+1} commutent entre eux (d'après 4), en particulier M_k et $(T - \lambda_{k+1}I_n)$:

  $$\forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad M_{k+1}E_i = (T - \lambda_{k+1}I_n)M_kE_i = (T - \lambda_{k+1}I_n)M_kE_i = (T - \lambda_{k+1}I_n)0 = 0$$

  En conclusion : $\forall i \in \{1, \ldots, k+1\} \quad M_{k+1}E_i = 0$
  Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \qquad M_kE_i = 0}$

En particulier, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $M_kE_k = 0$.

7) Pour $k = n$, le résultat précédent (celui montré, pas celui de l'énoncé) nous donne : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $M_nE_i = 0$.
Or $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{C}^n$. Donc, M_n étant nulle sur une base, $M_n = 0$.
De plus, $M_n = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i I_n) = (-1)^n \chi_T(T)$.
Par conséquent $\boxed{\chi_T(T) = (-1)^n M_n = 0}$
Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique. Il aura pour matrice T dans une base de trigonalisation.

Comme $\chi_T(T) = 0$, on a $\chi_T(u) = 0$. Par conséquent $\chi_T(M) = 0$ si M est une matrice de u dans une base quelconque. En particulier, pour la base canonique, on obtient $\chi_T(A) = 0$.
D'après 3), $\chi_T = \chi_A$, donc finalement $\boxed{\chi_A(A) = 0}$

Exercice 2 (E3A PC, B 2010)

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule de Moivre s'écrit

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos^3(x) + 3i\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) - i\sin^3(x)$$

Donc l'égalité des parties imaginaire s'écrit

$$\boxed{\sin(3x) = 3\sin(x)(1 - \sin^2(x)) - \sin^3(x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)}$$

b) i) Au voisinage de 0, $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + o(x) - \frac{1}{x} = -\frac{x}{6} + o(x)$$

Donc $\lim\limits_{0} f = 0$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$

ii) La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonction de classe C^1.
En $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{6}$ d'après le développement limité effectué au 1b.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - 2\sin(x) + x}{x^3} = \frac{x - x^3/2 - 2x + x^3/3 + x + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1)$$

et $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$ *(on peut aussi appliquer le théorème de prolongation $\mathscr{C}^1$: f et f' ont une limite en 0)*

2) a) La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^3(x)}{x^2}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- Au voisinage de 0, $\dfrac{\sin^3(x)}{x^2} \sim x$, la fonction est prolongeable par continuité donc intégrable.
- Au voisinage de $+\infty$, $\left|\dfrac{\sin^3(x)}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable (Riemann), donc la fonction est intégrable.

Conclusion : $\boxed{I \text{ existe}}$

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

i)
- Les deux fonctions sont continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ et $[3a, +\infty[$.
Au voisinage de $+\infty$, $\left|\dfrac{\sin(3x)}{x^2}\right|$ et $\left|\dfrac{\sin(x)}{x^2}\right|$ sont majorée par $\dfrac{1}{x^2}$, qui est intégrable. Donc $\boxed{\text{ces deux intégrales converges}}$.
- Le changement de variable $u = 3x$ dans la première intégrale nous donne

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2/9}\,\frac{\mathrm{d}u}{3} = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x}$$

ii) L'intégrale $I(a)$ converge (voir 2)a)). D'après 1a, $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, d'après ci-dessus,

$$4I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{x^2}\mathrm{d}x = 3\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x - 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x = 3\int_a^{3a} \varphi(x) + \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(3)$ donc

$$\boxed{I(a) = \frac{3}{4}\int_a^{3a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\ln(3)}{4}}$$

iii) Notons Φ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$. Puisque φ est continue sur $\mathbb{R}$, Φ est définie et continue en $x = 0$.

$$I = \lim_{a\to 0} I(a) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{3}{4}(\Phi(3a) - \Phi(a)) + \frac{\ln(3)}{4}\right) = \frac{\ln(3)}{4}$$

Exercice 3 (Inspiré de E3A MP, 2008)

1) Soit $f(x,t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(xt)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1[$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $f(x,\cdot)$ est continue sur $[0,1[$.
Au voisinage de $t = 1$: posons $h = 1-t$.

$$f(x,1-h) = \frac{1-h}{\sqrt{1-(1-h)^2}}\sin(x(1-h)) = \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\frac{1-h}{\sqrt{2-h}}\sin(x(1-h))\right)$$

La parenthèse est continue en $h = 0$ et $h \mapsto 1/\sqrt{h}$ est intégrable au voisinage de 0.
Conclusion : $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(-xt)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(xt)\,\mathrm{d}t = -g(x)$.
Donc $\boxed{g \text{ est impaire et } g(0) = 0}$

b) Soit $A > 0$ fixé.
Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme sur $\mathbb{R}$.
Pour $k = 0, 1, 2$, on pose

$$\varphi_k(t) = \frac{t^{k+1}}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ces trois fonctions sont intégrables pour les même raison que $f(x,\cdot)$ en 1a.

- Pour tout $t \in [0,1[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $[-A,A]$ et ses dérivées 1ere et secondes sont

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}(-t)\cos(-xt) \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}(-t)^2\sin(-xt)$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,1[$, et **intégrable** car dominées par des foncions intégrables, les φ_k (voir ci-dessous).
- Les fonctions φ_k sont intégrable sur $[0,1[$ et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1[\qquad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}|-t||\cos(-xt)| \leqslant \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \varphi_1(t) \\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}|-t|^2|\sin(-xt)| \leqslant \dfrac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} = \varphi_2(t) \end{cases}$$

Donc, d'après le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est } C^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} g'(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\cos(-xt)\,\mathrm{d}t \\ g''(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\sin(-xt)\,\mathrm{d}t \end{cases}.}$$

c) Pour tout $x \neq 0$, $\displaystyle\int_0^t u\sin(ux)\,\mathrm{d}u = \left[u\frac{-\cos(ux)}{x}\right] + \int_0^t \frac{ux}{x}\,\mathrm{d}u = \boxed{\frac{-t\cos(tx)}{x} + \frac{\sin(tx)}{x^2}}$

d) *La question suivante donne la relation à trouver...* Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
x^2(g(x)+g''(x)) &= x^2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}t\sin(-xt)\,\mathrm{d}t - x^2\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}t\sin(-xt)\,\mathrm{d}t \\
&= x^2\int_0^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}t\sin(-xt)\,\mathrm{d}t = x^2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,t\sin(-xt)\,\mathrm{d}t \\
&= x^2\left[\sqrt{1-t^2}\left(\frac{-t\cos(tx)}{x}+\frac{\sin(tx)}{x^2}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}(-xt\cos(tx)+\sin(tx))\,\mathrm{d}t \\
&= -xg'(x)+g(x)
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{x^2g''(x)+xg'(x)+(x^2-1)g(x)=0}$

e) On vérifie que la relation est vraie en $x=0$. On vient de le prouver pour tout $x\neq 0$. Donc $\boxed{g \text{ est solution de l'équation différentielle } x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0}$

2) Soit $x>1$.

a) $\displaystyle\int_{\alpha_x}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [-\sqrt{1-t^2}]_{\alpha_x}^1 = \sqrt{1-\alpha_x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donc $\boxed{\alpha_x = \sqrt{1-\frac{1}{x}}}$

b) Pour tout $t\in[0,1[$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = (1-t^2)^{-3/2}$. Ainsi l'intégration par partie s'écrit :

$$\int_0^{\alpha_x} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tx)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\cos(tx)}{x}\right]_0^{\alpha_x} + \frac{1}{x}\int_0^{\alpha_x}(1-t^2)^{-3/2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, comme $g(x) = \displaystyle\int_0^{\alpha_x}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tx)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha_x}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tx)\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}
|g(x)| &\leqslant \left|\int_0^{\alpha_x}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tx)\,\mathrm{d}t\right| + \underbrace{\int_{\alpha_x}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ par construction}} \\
&\leqslant \left|\frac{\alpha_x}{x\sqrt{1-\alpha_x^2}}\cos(\alpha_x x)\right| + \frac{1}{x}\int_0^{\alpha_x}(1-t^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{x}} && \text{(IPP ci-dessus)} \\
&\leqslant \frac{\alpha_x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\left[\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right]_0^{\alpha_x} + \frac{1}{\sqrt{x}} && \text{(calcul de dérivée ci-dessus)} \\
|g(x)| &\leqslant \frac{3}{\sqrt{x}} && (\text{car } \alpha_x \leqslant 1)
\end{aligned}$$