Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Partie 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 : $n \geqslant 3$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$u(e_1) = e_n, \quad u(e_2) = e_1, \quad u(e_3) = e_2, \quad \ldots \quad u(e_n) = e_{n-1}$$

C'est-à-dire $\forall k \in \{2, \ldots, n\}$, $u(e_k) = e_{k-1}$ et $u(e_1) = e_n$.

1) On note U la matrice de u dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}^n$. Expliciter la matrice U.

2) On note ω une racine n-ième de l'unité, et x_ω le vecteur de $\mathbb{C}^n$ défini par :

$$x_\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k$$

Calculer $u(x_\omega)$ en fonction de ω et de x_ω.

3) Montrer que u est diagonalisable. On précisera une base de vecteurs propres pour u.

4) Que peut-on dire de u^n ?

Partie 2 (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ le polynôme caractéristique de A. Le but de cette partie est de montrer que A annule son polynôme caractéristique, c'est-à-dire que

$$(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + I_n a_0 = 0$$

1) Justifier, en citant précisément le résultat utilisé, l'existence d'une matrice T triangulaire supérieure et d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$.
On note désormais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de T.
On note $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

2) Montrer que le polynôme caractéristique de T est $\chi_T(\lambda) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)$.

3) Montrer que $\chi_T = \chi_A$.

4) Vérifier que, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $(T - \lambda_i I_n)(T - \lambda_j I_n) = (T - \lambda_j I_n)(T - \lambda_i I_n)$.

5) Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, on a :

$$(T-\lambda_{k+1}I_n)E_{k+1} \in \text{Vect}\{E_1, \ldots, E_k\}$$

6) Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $M_k = (T-\lambda_1 I_n)(T-\lambda_2 I_n)\ldots(T-\lambda_k I_n)$.
Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur k, que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $M_k E_i = 0$.

7) En déduire que $\chi_T(T) = (-1)^n M_n = 0$, puis que $\chi_A(A) = 0$.

Exercice 2

1) Calculs Préliminaires

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

i) Montrer que la fonction f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$, que l'on notera φ.

ii) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que I existe.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

i) Montrer, et justifier leur convergence, que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telles que

$$I(a) = C\int_a^{3a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + D$$

iii) En déduire la valeur de I.

Exercice 3

On considère la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$

1) **a)** Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $g(0)$? La fonction a-t-elle une parité ?

b) Montrer que la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Exprimer g' et g'' à l'aide d'une intégrale.

c) Calculer, pour tout $x \neq 0$, la primitive s'annulant en 0 de $t \mapsto t\sin(tx)$.

d) Trouver , pour $x \neq 0$, une relation entre g'', g' et g.

e) En déduire que g est solution de l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$$

2) **a)** Déterminer, pour tout $x > 1$, un réel $\alpha_x \in]0,1[$, tel que $\displaystyle\int_{\alpha_x}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Dériver $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et intégrer par partie $\displaystyle\int_0^{\alpha_x} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tx)\,\mathrm{d}t$ pour en déduire que

$$\forall x > 1 \qquad |g(x)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{x}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE