Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1 (TPC 2008, partiel)

Partie 1 (Décomposition de Dunford : généralités)

1) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $A_1 = \Delta + N$. De plus Δ est diagonale donc diagonalisable, et $N^2 = 0$, donc N est nilpotente. On remarque que $\Delta = 3I_2$, donc Δ commute avec N. Ainsi,

$$\boxed{(\Delta, N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A_1.}$$

b) $\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\Delta N \neq N\Delta$, et

$$\boxed{(\Delta, N) \text{ n'est pas une décomposition de Dunford de } A_2.}$$

2) Montrons que $(A_3, 0)$ est une décomposition de Dunford de A_3.
$A_3 = A_3 + 0$, A_3 est diagonalisable par définition, 0 est nilpotente, et $A_3 0 = 0 A_3 = 0$. Conclusion :

$$\boxed{(A_3, 0) \text{ est une décomposition de Dunford de } A_3.}$$

3) Montrons que $(0, A_4)$ est une décomposition de Dunford de A_4.
$A_4 = 0 + A_4$, 0 est diagonalisable, A_4 est nilpotente par définition, et $A_3 0 = 0 A_3 = 0$. Conclusion :

$$\boxed{(0, A_4) \text{ est une décomposition de Dunford de } A_4.}$$

4) Soit (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A. Comme Δ et N commutent,

$$A\Delta = (\Delta + N)\Delta = \Delta^2 + N\Delta = \Delta^2 + \Delta N = \Delta(\Delta + N) = \Delta A$$

De même, $AN = \Delta N + N^2 = N\Delta + N^2 = NA$. Ainsi, $\boxed{\Delta \text{ et } N \text{ commutent avec } A.}$

Partie 2 (Étude d'un exemple)

1) Étude de Δ

a) $\chi_\Delta(\lambda) = \det(\Delta - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1^2) = (2-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$

Donc $\boxed{\text{Le spectre de } \Delta \text{ est } \{2, 4\}, \text{ 2 étant de multiplicité 2 et 4 de multiplicité 1.}}$

On pensera à vérifier que $\mathrm{Tr}\,\Delta = 8 = 2 + 2 + 4$.

Si on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice Δ, comme 0 n'est pas valeur propre, $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$, et f est injectif, donc bijectif (endomorphisme en dimension finie). Donc $\boxed{\Delta \text{ est inversible.}}$

On peut aussi passer par le déterminant : $\det \Delta = 2 \times 2 \times 4 = 16 \neq 0$.

b) *La question n'était pas très claire : demande-t-on de calculer P ?*

- $\underline{\lambda = 2}$: Soit $E_2 = \text{Ker}\,(\Delta - 2I_2)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff -x + y + z = 0$$

Donc $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

De plus, la valeur propre 4 est de multiplicité 1, donc le sous-espace propre associé est de dimension $\dim E_4 = 1$.

Ainsi, $\dim E_2 + \dim E_4 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc $\boxed{\Delta \text{ est diagonalisable.}}$

La question n'est pas très claire : faut-il calculer P ? L'énoncé n'attend sans doute pas un calcul de P^{-1}.

- $\underline{\lambda = 4}$: Soit $E_4 = \text{Ker}\,(\Delta - 4I_2)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{r} -2x = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right.$$

Donc $E_4 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Donc avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ on pose $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Comme $\Delta = PDP^{-1}$, on a aussi $P^{-1}\Delta P = D$.

c) La matrice D est inversible, et $D^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = D_1}$ est diagonale. Donc

$$\boxed{\Delta^{-1}} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1} \boxed{= PD^{-1}P^{-1}}$$

Ainsi, $\boxed{\Delta^{-1} \text{ est diagonalisable.}}$

2) Décomposition de A

a)
$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda) \end{aligned}$$

(Les opérations effectuées : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2$)

Déterminons la dimension de $E_2 = \text{Ker}\,(A - 2I_2)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, et $\dim E_2 = 1 < 2$, où 2 est la multiplicité de la valeur propre 2 dans le polynôme caractéristique χ_A. Par conséquent, $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

b) $N^2 = 0$ donc $\boxed{N \text{ est nilpotente.}}$

c) $N\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2N\Delta N.$

d) i) $\Delta + N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A,$

ii) D'après 2.1.b, Δ est diagonalisable,

iii) D'après 2.2.b, N est nilpotente,

iv) D'après 2.2.c, Δ et N commutent.

Par conséquent, $\boxed{(\Delta, N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A.}$

3) Décomposition de Dunford de A^{-1}

a) D'après 2.2.c, $\Delta N = N\Delta$ et Δ inversible d'après 2.1.a, donc $N = \Delta^{-1}N\Delta$ puis $\boxed{N\Delta^{-1} = \Delta^{-1}N}$

b) Comme Δ^{-1} et N commutent,

$$N_1^2 = (\Delta^{-1}N)^2 = (\Delta^{-1})^2N^2 = (\Delta^{-1})^2 0 = 0$$

Donc $\boxed{N_1 \text{ est nilpotente.}}$

c) $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1) = (I_3 - N_1)(I_3 + N_1) = I_3 - N_1^2 = I_3.$

Donc $\boxed{I_3 + N_1 \text{ est inversible}}$ et par unicité de l'inverse $\boxed{(I_3 + N_1)^{-1} = I_3 - N_1}$

d) 0 n'est pas valeur propre de A donc, de même qu'en 2.1.a, $\boxed{A \text{ est inversible}}$

e) $A = \Delta + N$ et Δ inversible (2.1.a), donc $A = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N) = \Delta(I_3 + N_1).$

Or Δ et $I_3 + N_1$ (2.3.c) sont inversibles, par conséquent $\boxed{A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}}$

En remplaçant à l'aide de 2.3.c, $A^{-1} = (I_3 - N_1)\Delta^{-1} = \Delta^{-1} - \Delta^{-1}N\Delta^{-1}.$

Comme Δ^{-1} et N commutent (2.3.a), on pose $\boxed{N_2 = -\Delta^{-2}N}$.

i) $A^{-1} = \Delta^{-1} + N_2$ d'après ci-dessus,

ii) D'après 2.1.c, Δ^{-1} est diagonalisable,

iii) De même qu'en 2.3.b, $N_2^2 = \Delta^{-4}N^2 = 0$ et N_2 est nilpotente,

iv) Comme Δ^{-1} et N commutent (2.3.a), Δ^{-1} et N_2 aussi.

Ainsi $\boxed{(\Delta^{-1}, -\Delta^{-2}N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A^{-1}}$

4) Décomposition de Dunford des puissances de A

a) Comme D est N commutent, la formule du binôme s'applique *(la décomposition de Dunford, c'est un peu « fait pour » la formule du binôme)*

$$A^p = (\Delta + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \Delta^{p-k}N^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{p}{k} \Delta^{p-k}N^k = \Delta^p + p\Delta^{p-1}N$$

Or d'après 2.2.c, $\Delta N = 2N$. Par récurrence, $\Delta^{p-1}N = 2^{p-1}N$. En conclusion,

$$\boxed{A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N}$$

b) i) D'après 2.4.a, $A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N,$

ii) Comme Δ est diagonalisable, $\Delta^p = PD^pP^{-1}$ est aussi diagonalisable,

iii) D'après 2.2.b, N est nilpotente,

iv) De même qu'en 2.2.c, Δ et N commutent, donc Δ^p et N aussi,

Ainsi $\boxed{(\Delta^p, p2^{p-1}N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A^p}$

c) $\Delta^p = PD^pP^{-1}$. Or, d'après respectivement 2.1.b, un calcul direct et un pivot,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 4^p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{\Delta^p = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1-2^p & 1+2^p & -1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}}$, puis

$$\boxed{A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 2+p & -p & p \\ 1+p-2^p & 1-p+2^p & p-1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}}$$

5) Décomposition de Dunford de R vérifiant $R^2 = A$.

a) $U = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 2 \end{pmatrix}$ avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$.

b) Pour avoir des valeurs propres positives, on doit choisir $U = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et on pose

$$\boxed{S = PUP^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/2\,\sqrt{2}-1 & 1/2\,\sqrt{2}+1 & -1/2\,\sqrt{2}+1 \\ 1/2\,\sqrt{2}-1 & -1/2\,\sqrt{2}+1 & 1/2\,\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}}$$

Ainsi, $S^2 = PU^2P^{-1} = PDP^{-1} = \Delta$.

c) Sous forme diagonalisée, l'égalité s'écrit $U = aD + bI_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 4a+b \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $2a + b = \sqrt{2}$ et $4a + b = 2$. Ainsi les solutions sont $\boxed{a = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 \text{ et } b = 2\sqrt{2} - 2}$

Comme Δ et N commutent, Δ et N_1 commutent. De plus I_3 commute avec toutes les matrices. Donc $\boxed{S \text{ et } N_1 \text{ commutent.}}$

d) Comme I_3 et N_1 commutent, le binôme s'écrit $M^2 = (I_3 + \frac{1}{2}N_1)^2 = I_3 + N_1 + \frac{1}{4}N_1^2 = I_3 + N_1$.

e) On a $A = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N) = \Delta(I_3 + N_1)$.

À la question 2.5.b, on a déterminé une matrice S telle que $S^2 = \Delta$.

À la question 2.5.d, on a déterminé une matrice $M = I_3 + \frac{1}{2}N_1$ telle que $M^2 = I_3 + N_1$. Le résultat de 2.5.c entraîne que S et M commutent.

Posons $\boxed{R = SM}$. Comme S et M commutent, $(SM)^2 = S^2M^2 = \Delta(I_3 + N_1) = A$. Donc R convient.

Il y en a beaucoup d'autres qui conviennent, et pas uniquement en changeant U : il y a plus de libertés.

f) $R = S + \frac{1}{2}SN_1$, S est diagonalisable (2.5.b), S et $\frac{1}{2}SN_1$ commutent (conséquence de 2.5.c), $(\frac{1}{2}SN_1)^2 = 0$; par conséquent

$$\boxed{(S, \frac{1}{2}SN_1) \text{ est une décomposition de Dunford de } R.}$$

On peut prouver que la décomposition de Dunford $A = D + N$ est unique, et que D et N sont des polynômes en A.

Exercice 2 (PT A 2010, partiel— corrigé UPS)

Partie 1 (Questions préliminaires)

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tous $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_A(\lambda.M+N) &= A(\lambda.M+N) \\
&= \lambda.AM + AN \quad (\text{distributivité dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\
&= \lambda.\varphi_A(M) + \varphi_A(N) \\
\tau_A(\lambda.M+N) &= \operatorname{Tr}\big(A(\lambda.M+N)\big) \\
&= \operatorname{Tr}\big(\lambda.AM + AN\big) \quad (\text{distributivité dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\
&= \lambda.\operatorname{Tr}(AM) + \operatorname{Tr}(AN) \quad (\text{linéarité de l'application trace}) \\
&= \lambda.\tau_A(M) + \tau_A(N) \\
\gamma_A(\lambda.M+N) &= A(\lambda.M+N) - (\lambda.M+N)A \\
&= \lambda.AM + AN - \big(\lambda.MA + NA\big) \quad (\text{distributivité à gauche et à droite dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\
&= \lambda.(AM - MA) + (AN - NA) \\
&= \lambda.\gamma_A(M) + \gamma_A(N).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les applications } \varphi_A,\ \tau_A \text{ et } \gamma_A \text{ sont linéaires.}}$

2) Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de dimension } n^2.}$

Si E et F sont deux espaces vectoriels, sur un même corps K, de dimensions finies alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension $\dim E \times \dim F$. En particulier, on en déduit que $\mathcal{L}(E,K)$ est de dimension $\dim E$ donc : $\boxed{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = n^2}$.

3) Si E est un espace vectoriel de dimension finie n et si $(e_1,\dots,e_k)$ est une famille libre de E alors il existe des vecteurs $e_{k+1},\dots,e_n$ de E tels que $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ soit une base de E.

Partie 2 (Un exemple)

1) La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux : 1 et 2.

Puisque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

2) Le polynôme caractéristique de la matrice B est $(X-1)^2(X-2)^2$.

On en déduit que les valeurs propres sont 1 et 2 et les sous-espaces propres correspondants sont de dimension au plus 2.

Tout d'abord, on remarque :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$ sont deux vecteurs du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. De plus ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre et on a vu que E_1 est de dimension au plus 2 donc :

$$E_1 = \operatorname{Vect}\big((1,0,0,0),(0,1,0,0)\big).$$

D'autre part, soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, on note E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 alors :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in E_2 &\iff \begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&3\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\y\\z\\t\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}t\\y\\z\\t\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}x+3z=2x\\y+3t=2y\\2z=2z\\2t=2t\end{cases}\\
&\iff x=3z \text{ et } y=3t\\
&\iff (x,y,z,t)=(3z,3t,z,t)\\
&\iff (x,y,z,t)=z.(3,0,1,0)+t.(0,3,0,1)\\
&\iff (x,y,z,t)\in \mathrm{Vect}\,\big((3,0,1,0),(0,3,0,1)\big).
\end{aligned}$$

De plus, les vecteurs $(3,0,1,0)$ et $(0,3,0,1)$ ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre donc ils forment une base de :

$$E_2=\mathrm{Vect}\,\big((3,0,1,0),(0,3,0,1)\big).$$

Les calculs précédents montrent que E_1 et E_2 sont tous deux de dimension 2 ce qui correspond à la multiplicité de la valeur propre correspondante donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$ est une base de vecteurs propres est constituée par les vecteurs :

$$\boxed{(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ ,(3,0,1,0) \text{ et } (0,3,0,1).}$$

3) **a)** On a :

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\iff \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\ /\ M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\\
&\iff \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\ /\ M=a.\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d.\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\
&\iff \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\ /\ M=a.E_{11}+b.E_{12}+cE_{21}+d.E_{22}\\
&\iff M\in\mathrm{Vect}\,(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\mathcal{E}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ or cette famille contient 4 éléments et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 donc cette famille génératrice est également libre donc c'est $\boxed{\text{une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

b) On a :

- $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{11})=E_{11}}$.
- $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{12})=E_{12}}$.
- $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\2&0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{21})=3E_{11}+2E_{21}}$.
- $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\0&2\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{22})=3E_{12}+2E_{22}}$.

c) Les relations précédentes montrent que $\boxed{B \text{ est la matrice de } \varphi_A \text{ dans la base } \mathcal{E}.}$

d) D'après les questions I.2 et I.3.c, $\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable.}}$

Une base de vecteurs propres de B est constituée par les vecteurs :

$$(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ ,(3,0,1,0) \text{ et } (0,3,0,1)$$

donc une base de vecteurs propres de φ_A est constituée par les matrices :

$$\boxed{E_{11}\ ,\ E_{12}\ ,\ 3E_{11}+E_{12} \text{ et } 3E_{12}+E_{22}.}$$

Partie 3 (Réduction de l'endomorphisme φ_A)

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$ ce qui signifie $AM = \lambda M$ puis $(A - \lambda I_n)M = 0_n$.
Si la matrice $A - \lambda I_n$ était inversible alors on en déduirait :

$$(A-\lambda I_n)^{-1}(A-\lambda I_n)M = 0_n \quad \text{donc} \quad M = 0_n$$

ce qui contredit l'hypothèse M non nulle.
Donc $\boxed{\text{la matrice } A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible.}}$

2) Si λ est une valeur propre de φ_A alors il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$.
D'après la question précédente, on en déduit que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible donc que $\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } A.}$

3) Supposons que M soit la matrice dont la k^{e} colonne est X et toutes les autres sont nulles, on note $C_1, \ldots, C_n$ lesdites colonnes alors les colonnes de la matrice AM sont $AC_1, \ldots, AC_n$.
Si $i \neq k$ alors le produit AC_i est la colonne nulle.
Sinon, on a $AC_k = AX$ donc $AC_k = \mu X$.
Donc AM est la matrice dont la k^{e} colonne est μX et toutes les autres sont nulles donc $AM = \mu M$.
On a $\varphi_A(M) = \mu M$ et M est non nulle (puisque X est non nulle) donc $\boxed{M \text{ est un vecteur propre de } \varphi_A.}$

4) D'après la question II.2, une valeur propre de φ_A est une valeur propre de A.
D'après la question II.3, une valeur propre de A est une valeur propre de φ_A.
On en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres de } \varphi_A \text{ sont celles de } A.}$

5) On suppose A diagonalisable alors A admet une base de vecteurs propres correspondant à des vecteurs colonnes $X_1, \ldots, X_n$.
Pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]$, on note $M_{i,j}$ la matrice dont la j^{e} colonne est X_i et dont toutes autres colonnes sont nulles.
D'après la question II.3, les matrices $M_{i,j}$ sont des vecteurs propres de φ_A.
De plus, considérons une combinaison linéaire nulle des matrices précédentes :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} M_{i,j} = 0_n.$$

En considérant la j^{e} colonne, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i = 0_{n,1}$$

or $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\lambda_{1,j}, \ldots, \lambda_{n,j}$ sont tous nuls.
Puisque j est quelconque entre 1 et n, on en déduit que tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls *i.e.* la famille des matrices $M_{i,j}$ est libre or elle contient n^2 vecteurs ce qui correspond à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, φ_A admet une base de vecteurs propres donc $\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable.}}$

Partie 4 (Une caractérisation des matrices nilpotentes)

1) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre colonne associé.
Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $A^k X = \lambda^k X$ » dépendant de $k \in \mathbb{N}^*$.

- Par choix de X, on a $AX = \lambda X$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  Puisque $\mathcal{P}(k)$ est supposée vraie par hypothèse de récurrence, on a $A^k X = \lambda^k X$.
  Alors :
  $$\begin{aligned} A^{k+1}X &= A^k(AX) \\ &= A^k(\lambda X) \\ &= \lambda A^k X \\ &= \lambda\lambda^k X \\ &= \lambda^{k+1}X \end{aligned}$$
  donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- On a $\mathcal{P}(1)$ vraie et : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \big(\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)\big)$.
  D'après le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  En particulier, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^k \text{ est une valeur propre de } A^k.}$

2) **a)** Puisque A est nilpotente, il existe un entier $p \geq 1$ tel que A^p soit la matrice nulle.
Si λ est une valeur propre de A alors, d'après la question précédente, λ^p est une valeur propre de A^p qui est la matrice nulle donc $\lambda^p = 0$.
On en déduit que $\lambda = 0$ *i.e.* $\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } A}$.

b) Trigonalisons A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: puisque 0 est la seule valeur propre de A, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.
En particulier on a $\operatorname{Tr}(P^{-1}AP) = 0$ mais :
$$\operatorname{Tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{Tr}((AP)P^{-1}) \quad \text{donc} \quad \boxed{\operatorname{Tr}(A) = 0}.$$

3) **a)** Puisque $AM = MA$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (AM)^k = A^k M^k$.
Puisque A est nilpotente, il existe un entier $p \geq 1$ tel que A^p soit la matrice nulle, on a donc :
$$(AM)^p = 0_n \times M^p = 0_n$$
donc $\boxed{AM \text{ est nilpotente.}}$

b) Soit $M \in \operatorname{Ker}(\gamma_A)$ *i.e.* $AM - MA$ est la matrice nulle.
D'après la question précédente, on en déduit que la matrice AM est nilpotente.
D'après la question IV.2.b, on en déduit que AM est de trace nulle *i.e.* $\tau_A(M) = 0$.
Ainsi, pour tout $M \in \operatorname{Ker}(\gamma_A)$, on a $M \in \operatorname{Ker}(\tau_A)$ *i.e.* $\boxed{\operatorname{Ker}(\gamma_A) \subset \operatorname{Ker}(\tau_A)}$.

c) **i)** $UE_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & u_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ où la colonne non nulle est la j-ème.
Donc $\operatorname{Tr} UE_{ij} = u_{ji}$.

ii) Soit $(U,V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(\lambda.U+V)(M) &= \tau_{\lambda.U+V}(M) \\ &= \operatorname{Tr}\big((\lambda.U+V)M\big) \\ &= \lambda \operatorname{Tr}(UM) + \operatorname{Tr}(VM) \\ &= \lambda\tau_U(M) + \tau_V(M) \\ &= \lambda f(U)(M) + f(V)(M) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(\lambda.U+V)=\lambda f(U)+f(V)$ *i.e.* f est linéaire.
Considérons $U\in\operatorname{Ker}(f)$ alors :

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \tau_U(M)=0\ \ i.e.\ \ \operatorname{Tr}(UM)=0.$$

En particulier pour $M=E_{ij}$, d'après i), $\operatorname{Tr}(UM)=u_{ij}=0$. Cette égalité étant valable pour tout i, j, la matrice U est nulle donc f est injectif.
Ainsi, f est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriel de même dimension finie (partie 1) donc $\boxed{f \text{ est un isomorphisme}}$ ce qui donne :

$$\boxed{\forall\varphi\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*,\ \exists! U\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \varphi=\tau_U}$$

c'est-à-dire :

iii) D'après la question IV.3.b, il existe $\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ telle que $\tau_A=\varphi\circ\gamma_A$.
Mais d'après la question précédente, il existe une (unique) matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi=\tau_B$.
Finalement, on a montré l'existence (et l'unicité) de $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\boxed{\tau_A=\tau_B\circ\gamma_A}$.

d) La relation précédente donne :

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{Tr}(AM)=\operatorname{Tr}\big(B(AM-MA)\big)$$

d'où en utilisant les propriétés de l'application Tr :

$$\begin{aligned}\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{Tr}(AM)&=\operatorname{Tr}(BAM-BMA)\\&=\operatorname{Tr}(BAM)-\operatorname{Tr}(BMA)\\&=\operatorname{Tr}(BAM)-\operatorname{Tr}(ABM)\\&=\operatorname{Tr}\big((BA-AB)M\big)\end{aligned}$$

ce qui montre que les deux formes linéaires suivantes sont égales :

$$M\mapsto\operatorname{Tr}(AM)\ \ \text{et}\ \ M\mapsto\operatorname{Tr}\big((BA-AB)M\big)$$

D'après l'unicité de la matrice U dans le résultat de la question IV.3.c.ii., on en déduit que : $\boxed{A=BA-AB}$.

4) a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{Q}(k)$: « $BA^k-A^kB=kA^k$ » dépendant de $k\in\mathbb{N}^*$.

- Par hypothèse, on a $BA-AB=A$ donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
- Soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(k)$ soit vraie, montrons que $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.
  Puisque $\mathcal{Q}(k)$ est supposée vraie par hypothèse de récurrence, on a $BA^k-A^kB=kA^k$.
  Alors :

$$\begin{aligned}A^{k+1}&=AA^k\\&=(BA-AB).A^k\\&=BA^{k+1}-A(BA^k)\\&=BA^{k+1}-A(kA^k+A^kB)\\&=BA^{k+1}-kA^{k+1}-A^{k+1}B\end{aligned}$$

  d'où $(k+1)A^{k+1}=BA^{k+1}-A^{k+1}B$ et $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.
- On a $\mathcal{Q}(1)$ vraie et : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \big(\mathcal{Q}(k)\Rightarrow\mathcal{Q}(k+1)\big)$.
  D'après le théorème de récurrence, $\mathcal{Q}(k)$ est donc vraie pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
  On a donc : $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*, BA^k-A^kB=kA^k.}$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la relation précédente s'écrit : $\gamma_B(A^k) = kA^k$.

Ainsi : $\boxed{\text{si } A^k \text{ est non nulle alors } A^k \text{ est un vecteur propre de } \gamma_B \text{ associé à la valeur propre } k.}$

c) Supposons A non nilpotente alors A^k est non nulle pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après les deux question précédentes, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est un vecteur propre de γ_B associé à la valeur propre k.

En particulier, γ_B admet une infinité de valeurs propres distinctes ce qui n'est pas possible pour un endomorphisme en dimension finie.

Donc $\boxed{A \text{ est nilpotente.}}$

FIN DE L'ÉPREUVE