Lycée La Prat's
Classe de PT

Jeudi 17 janvier 2013

Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (TPC 2008, partiel)

Partie 1 (Décomposition de Dunford : généralités)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n et O_n respectivement la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, s'il existe $\Delta, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

i) $A = \Delta + N$,

ii) Δ est diagonalisable,

iii) N est nilpotente (i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = O_n$),

iv) $\Delta N = N\Delta$, autrement dit les matrices Δ et N commutent,

alors on dira que le couple (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A.

1) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A_1.

b) Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) n'est pas une décomposition de Dunford de A_2.

2) Soit A_3 une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_3 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

3) De même, soit A_4 une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_4 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

4) Vérifier que si (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A, alors Δ et N commutent avec A.

Partie 2 (Étude d'un exemple)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on pose $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Étude de Δ

a) Déterminer le spectre de Δ (i.e. l'ensemble des valeurs propres), en déduire que Δ est inversible.

b) Montrer que Δ est diagonalisable et la diagonaliser sous la forme $P^{-1}\Delta P = D$, avec $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible que l'on précisera et

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) En déduire, de manière élémentaire, que Δ^{-1} est diagonalisable, et exprimer Δ^{-1} en fonction de P, P^{-1} et d'une matrice diagonale D_1 à déterminer.

2) Décomposition de A

a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

b) Montrer que N est nilpotente.

c) Vérifier que $N\Delta = \Delta N$.

d) En déduire que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

3) Décomposition de Dunford de A^{-1}
On pose $N_1 = \Delta^{-1}N$.

a) À l'aide de **2.2.c** montrer que $\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}$.

b) En déduire que N_1 est nilpotente.

c) Développer $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1)$. En déduire que $I_3 + N_1$ est inversible et donner son inverse en fonction des matrices précédente (on ne cherchera pas à déterminer ses coefficients).

d) Justifier l'existence de A^{-1}.

e) Montrer que $A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}$ et en déduire une décomposition de Dunford de A^{-1}.

4) Décomposition de Dunford des puissances de A
Soit $p \in \mathbb{N}$.

a) À l'aide de la décomposition de Dunford (Δ, N) de A, montrer que

$$A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N.$$

b) Vérifier que $(\Delta^p, p2^{p-1}N)$ est une décomposition de Dunford de A^p.

c) Calculer Δ^p. En déduire que :

$$A^p = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 2+p & -p & p \\ 1+p-2^p & 1-p+2^p & p-1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}.$$

5) Décomposition de Dunford de R vérifiant $R^2 = A$, R s'appelle une racine carrée de A

a) Déterminer les matrices $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $U^2 = D$.

b) À l'aide des matrices P et P^{-1}, déterminer alors une matrice S à **valeurs propres positives** telle que $S^2 = \Delta$.

c) Déterminer deux réels a et b, tels que $S = a\Delta + bI_3$, en raisonnant sur les formes diagonalisées. En déduire que S et N_1 commutent.

d) On pose $M = I_3 + \frac{1}{2}N_1$. Montrer que $M^2 = I_3 + N_1$.

e) En remarquant que $A = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N)$, déterminer une matrice R telle que $R^2 = A$.

f) Donner une décomposition de Dunford de R.

Exercice 2 (PT A 2010, partiel)

Le problème se compose de quatre parties. Les trois premières sont totalement indépendantes entre elles. La quatrième utilise les résultats des parties précédentes mais peut se traiter en admettant ces résultats.
On identifie dans tout ce problème $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des matrices colonnes à n lignes.
On note E^* l'espace $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires sur E. Par exemple $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$ sera l'ensemble des applications linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Dans tout le problème, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications suivantes :

$$\varphi_A : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}, \qquad \tau_A : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \operatorname{Tr}(AM) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \gamma_A : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Partie 1 (Questions préliminaires)

1) Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, les applications φ_A, τ_A et γ_A sont linéaires.

2) Donner la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et celle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$.

3) Énoncer le théorème de la base incomplète.

Partie 2 (Un exemple)

Dans cette partie, et dans cette partie seulement, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2) La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser une base de vecteurs propres.

3) On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que la famille $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Calculer $\varphi_A(E_{ij})$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. Donner la matrice de φ_A dans la base $\mathscr{B}$.

c) L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ? Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de φ_A (on rappelle qu'ici un vecteur propre sera une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$).

Partie 3 (Réduction de l'endomorphisme φ_A)

On se fixe désormais $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\varphi_A(M) = \lambda M$.
Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

2) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de φ_A, c'est également une valeur propre de A.

3) Soit μ une valeur propre de A, X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \mu X$. Soit M une matrice dont une colonne est égale à X et toutes les autres colonnes sont nulles.
Montrer que M est un vecteur propre de φ_A.

4) Donner l'ensemble des valeurs propres de φ_A.

5) Montrer que si A est diagonalisable, φ_A l'est également (on pourra, à partir d'une base de vecteurs propres de A, construire une base de vecteurs propres de φ_A).

Partie 4 (Une caractérisation des matrices nilpotentes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

1) Montrer que si λ est une valeur propre (éventuellement complexe) de A, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ^k est une valeur propre de A^k.

2) On suppose A nilpotente.

a) Montrer que la seule valeur propre de A est 0.

b) Montrer que $\operatorname{Tr} A = 0$.

3) On suppose toujours A nilpotente.

a) Soit M une matrice telle que $AM = MA$. Montrer que la matrice AM est encore nilpotente.

b) En déduire que $\operatorname{Ker} \gamma_A \subset \operatorname{Ker} \tau_A$.

On admettra[1] qu'il existe $w : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $\tau_A = w \circ \gamma_A$.

c) **i)** Si $E_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice ayant un 1 en i-ème ligne, j-ème colonne, et 0 ailleurs, et $U = (u_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, calculer le produit UE_{ij} puis $\operatorname{Tr}(UE_{ij})$.

ii) Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^* \\ U & \mapsto & \tau_U \end{array}$ est linéaire et injective.

En déduire que f est un isomorphisme.

iii) En déduire qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A$.

d) Montrer que $A = BA - AB$.

4) On suppose maintenant qu'il existe une matrice B telle que $A = BA - AB$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $BA^k - A^kB = kA^k$.

b) À quelle condition la matrice A^k est-elle un vecteur propre de γ_B ?

c) En déduire que A est nilpotente.

FIN DE L'ÉPREUVE

1. Ce théorème de factorisation a été vu lors de l'exercice 18 de la feuille d'algèbre linéaire.