Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Notations :
Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.
$\mathscr{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs. On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Étant donné $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathscr{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

1) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **a)** Montrer que f est diagonalisable.
- **b)** Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
- **c)** Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.
- **d)** Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
- **e)** Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée en 1b.
- **f)** Montrer que si $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
- **g)** Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

2) Soit f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer par récurrence J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

b) En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

c) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

d) **i)** À l'aide de la question 2b, trouver des endomorphismes p et q tels que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad f^m = \lambda^m p + \mu^m q \tag{1}$$

ii) Montrer que ce couple (p, q) est unique : $\exists!(p, q) \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifiant (1).

iii) Montrer que (p, q) forme une famille libre.

e) **i)** Calculer p^2 et q^2. Quelle est la nature des endomorphismes p et q ? Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

ii) Trouver tous les endomorphismes $h = \alpha p + \beta q$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, qui vérifient $h^2 = f$.

f) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice D de f, puis les matrices de p et de q, dans cette nouvelle base.

g) Déterminer une matrice K de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

h) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.
On rappelle que la famille $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Les résultats de la partie 1 sont utilisés en fin de partie 3.

Partie 1

Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur une partie X de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. On explicitera $f^{-1}(y)$ pour $y \in X$.

Partie 2

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $u(P) = X^n P\Big(1 + \dfrac{1}{X}\Big)$, où l'on a noté $P\Big(1 + \dfrac{1}{X}\Big)$ le polynôme P évalué en $1 + \dfrac{1}{X}$ (de la même façon que l'on notera $P(2)$ le polynôme P évalué en 2).

1) Dans cette question seulement, on prend $n = 2$.

a) Pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer $u(P)$ sous la forme $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$ avec α, β et γ réels que l'on exprimera en fonction de a, b et c.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} u(P)(x)$.

2) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la limite $\ell = \lim\limits_{x \to 0} u(P)(x)$.

3) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

Partie 3

On notera M_n la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

1) Montrer que $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et montrer que M_3 est inversible.

2) On revient au cas général, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et en déduire que u est bijectif.

3) On pose, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $Q_k(X) = (X + 1)^k X^{n-k}$.
Exprimer $u(P)$ à l'aide de $(Q_0, \dots, Q_n)$, puis, en utilisant la question précédente, en déduire que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est libre.

4) En déduire que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) Exprimer, pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$, $u(X^{j-1})$ à l'aide de $X^{n-j+1}, X^{n-j+2}, \dots, X^n$.

6) En déduire, pour i et j dans $\{1, \dots, n+1\}$, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M_n.

7) Déterminer, pour x réel différent de 1, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P)(f^{-1}(x))$.

8) En déduire u^{-1}.

9) Déterminer M_n^{-1} (on donnera le coefficient a_{ij} situé sur la ligne i et la colonne j).

Exercice 3

1) Calculs Préliminaires

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

i) Montrer que la fonction f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$, que l'on notera φ.

ii) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que I existe.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

i) Montrer, et justifier leur convergence, que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telles que

$$I(a) = C\int_a^{3a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + D$$

iii) En déduire la valeur de I.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit f_n par $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1) Étude de f_n. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

a) Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, +\infty[$, puis déterminer les variations de f_n.

b) En minorant f_n, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

c) En déduire qu'il existe un unique $u_n \in [n, +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 1$.

2) Étude de la suite (u_n).

a) Déterminer la limite de (u_n).

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{u_n}}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - n$.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

b) Montrer que, pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$

d) En déduire que $v_n \sim e^{-\sqrt{n}}$.

FIN DE L'ÉPREUVE