Épreuve de Mathématiques 4

Correction

Exercice 1 (PT A 2010, partiel— corrigé UPS)

Partie 1 (Questions préliminaires)

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tous $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_A(\lambda.M + N) &= A(\lambda.M + N) \\
&= \lambda.AM + AN \quad \text{(distributivité dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\
&= \lambda.\varphi_A(M) + \varphi_A(N) \\
\tau_A(\lambda.M + N) &= \operatorname{Tr}\big(A(\lambda.M + N)\big) \\
&= \operatorname{Tr}\big(\lambda.AM + AN\big) \quad \text{(distributivité dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\
&= \lambda.\operatorname{Tr}(AM) + \operatorname{Tr}(AN) \quad \text{(linéarité de l'application trace)} \\
&= \lambda.\tau_A(M) + \tau_A(N) \\
\gamma_A(\lambda.M + N) &= A(\lambda.M + N) - (\lambda.M + N)A \\
&= \lambda.AM + AN - \big(\lambda.MA + NA\big) \quad \text{(distributivité à gauche et à droite dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\
&= \lambda.(AM - MA) + (AN - NA) \\
&= \lambda.\gamma_A(M) + \gamma_A(N).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les applications } \varphi_A,\ \tau_A \text{ et } \gamma_A \text{ sont linéaires.}}$

2) Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de dimension } n^2.}$

Si E et F sont deux espaces vectoriels, sur un même corps K, de dimensions finies alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension $\dim E \times \dim F$. En particulier, on en déduit que $\mathcal{L}(E, K)$ est de dimension $\dim E$ donc : $\boxed{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = n^2}$.

3) Si E est un espace vectoriel de dimension finie n et si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une famille libre de E alors il existe des vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$ de E tels que $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

Partie 2 (Un exemple)

1) La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux : 1 et 2.

Puisque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

2) Le polynôme caractéristique de la matrice B est $(X - 1)^2(X - 2)^2$.

On en déduit que les valeurs propres sont 1 et 2 et les sous-espaces propres correspondants sont de dimension au plus 2.

Tout d'abord, on remarque :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$ sont deux vecteurs du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. De plus ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre et on a vu que E_1 est de dimension au plus 2 donc :

$$E_1 = \text{Vect }\big((1,0,0,0),(0,1,0,0)\big).$$

D'autre part, soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on note E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 alors :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in E_2 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + 3z = 2x \\ y + 3t = 2y \\ 2z = 2z \\ 2t = 2t \end{cases} \\
&\iff x = 3z \text{ et } y = 3t \\
&\iff (x,y,z,t) = (3z,3t,z,t) \\
&\iff (x,y,z,t) = z.(3,0,1,0) + t.(0,3,0,1) \\
&\iff (x,y,z,t) \in \text{Vect }\big((3,0,1,0),(0,3,0,1)\big).
\end{aligned}$$

De plus, les vecteurs $(3,0,1,0)$ et $(0,3,0,1)$ ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre donc ils forment une base de :

$$E_2 = \text{Vect }\big((3,0,1,0),(0,3,0,1)\big).$$

Les calculs précédents montrent que E_1 et E_2 sont tous deux de dimension 2 ce qui correspond à la multiplicité de la valeur propre correspondante donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$ est une base de vecteurs propres est constituée par les vecteurs :

$$\boxed{(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ ,(3,0,1,0) \text{ et } (0,3,0,1).}$$

3) **a)** On a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ M = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ M = a.E_{11} + b.E_{12} + cE_{21} + d.E_{22} \\
&\iff M \in \text{Vect}\,(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ or cette famille contient 4 éléments et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 donc cette famille génératrice est également libre donc c'est $\boxed{\text{une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

b) On a :

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{11}) = E_{11}}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{12}) = E_{12}}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{21}) = 3E_{11} + 2E_{21}}$.

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{22}) = 3E_{12} + 2E_{22}}$.

c) Les relations précédentes montrent que $\boxed{B \text{ est la matrice de } \varphi_A \text{ dans la base } \mathcal{E}.}$

d) D'après les questions I.2 et I.3.c, $\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable.}}$
Une base de vecteurs propres de B est constituée par les vecteurs :

$$(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ ,(3,0,1,0) \text{ et } (0,3,0,1)$$

donc une base de vecteurs propres de φ_A est constituée par les matrices :

$$\boxed{E_{11}\ ,\ E_{12}\ ,\ 3E_{11} + E_{12} \text{ et } 3E_{12} + E_{22}.}$$

Partie 3 (Réduction de l'endomorphisme φ_A)

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$ ce qui signifie $AM = \lambda M$ puis $(A - \lambda I_n)M = 0_n$.
Si la matrice $A - \lambda I_n$ était inversible alors on en déduirait :

$$(A - \lambda I_n)^{-1}(A - \lambda I_n)M = 0_n \quad \text{donc} \quad M = 0_n$$

ce qui contredit l'hypothèse M non nulle.
Donc $\boxed{\text{la matrice } A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible.}}$

2) Si λ est une valeur propre de φ_A alors il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$.
D'après la question précédente, on en déduit que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible donc que $\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } A.}$

3) Supposons que M soit la matrice dont la k^{e} colonne est X et toutes les autres sont nulles, on note $C_1, \ldots, C_n$ lesdites colonnes alors les colonnes de la matrice AM sont $AC_1, \ldots, AC_n$.
Si $i \neq k$ alors le produit AC_i est la colonne nulle.
Sinon, on a $AC_k = AX$ donc $AC_k = \mu X$.
Donc AM est la matrice dont la k^{e} colonne est μX et toutes les autres sont nulles donc $AM = \mu M$.
On a $\varphi_A(M) = \mu M$ et M est non nulle (puisque X est non nulle) donc $\boxed{M \text{ est un vecteur propre de } \varphi_A.}$

4) D'après la question II.2, une valeur propre de φ_A est une valeur propre de A.
D'après la question II.3, une valeur propre de A est une valeur propre de φ_A.
On en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres de } \varphi_A \text{ sont celles de } A.}$

5) On suppose A diagonalisable alors A admet une base de vecteurs propres correspondant à des vecteurs colonnes $X_1, \ldots, X_n$.
Pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on note $M_{i,j}$ la matrice dont la j^{e} colonne est X_i et dont toutes autres colonnes sont nulles.
D'après la question II.3, les matrices $M_{i,j}$ sont des vecteurs propres de φ_A.
De plus, considérons une combinaison linéaire nulle des matrices précédentes :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} M_{i,j} = 0_n.$$

En considérant la j^{e} colonne, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i = 0_{n,1}$$

or $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\lambda_{1,j}, \ldots, \lambda_{n,j}$ sont tous nuls.
Puisque j est quelconque entre 1 et n, on en déduit que tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls *i.e.* la famille des matrices $M_{i,j}$ est libre or elle contient n^2 vecteurs ce qui correspond à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, φ_A admet une base de vecteurs propres donc $\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable.}}$

Partie 4 (Une caractérisation des matrices nilpotentes)

1) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre colonne associé.

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $A^kX = \lambda^kX$ » dépendant de $k \in \mathbb{N}^*$.

- Par choix de X, on a $AX = \lambda X$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  Puisque $\mathcal{P}(k)$ est supposée vraie par hypothèse de récurrence, on a $A^kX = \lambda^kX$.
  Alors :
  $$\begin{aligned} A^{k+1}X &= A^k(AX) \\ &= A^k(\lambda X) \\ &= \lambda A^kX \\ &= \lambda\lambda^kX \\ &= \lambda^{k+1}X \end{aligned}$$
  donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- On a $\mathcal{P}(1)$ vraie et : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1))$.
  D'après le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  En particulier, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^k \text{ est une valeur propre de } A^k.}$

2) **a)** Puisque A est nilpotente, il existe un entier $p \geq 1$ tel que A^p soit la matrice nulle.
Si λ est une valeur propre de A alors, d'après la question précédente, λ^p est une valeur propre de A^p qui est la matrice nulle donc $\lambda^p = 0$.
On en déduit que $\lambda = 0$ *i.e.* $\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } A}$.

b) Trigonalisons A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: puisque 0 est la seule valeur propre de A, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

En particulier on a $\mathrm{Tr}\,(P^{-1}AP) = 0$ mais :
$$\mathrm{Tr}\,(P^{-1}(AP)) = \mathrm{Tr}\,((AP)P^{-1}) \;\text{ donc }\; \boxed{\mathrm{Tr}\,(A) = 0}.$$

3) **a)** Puisque $AM = MA$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (AM)^k = A^kM^k$.
Puisque A est nilpotente, il existe un entier $p \geq 1$ tel que A^p soit la matrice nulle, on a donc :
$$(AM)^p = 0_n \times M^p = 0_n$$
donc $\boxed{AM \text{ est nilpotente.}}$

b) Soit $M \in \mathrm{Ker}\,(\gamma_A)$ *i.e.* $AM - MA$ est la matrice nulle.
D'après la question précédente, on en déduit que la matrice AM est nilpotente.
D'après la question IV.2.b, on en déduit que AM est de trace nulle *i.e.* $\tau_A(M) = 0$.
Ainsi, pour tout $M \in \mathrm{Ker}\,(\gamma_A)$, on a $M \in \mathrm{Ker}\,(\tau_A)$ *i.e.* $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\gamma_A) \subset \mathrm{Ker}\,(\tau_A)}$.

c) **i)** $UE_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & u_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ où la colonne non nulle est la j-ème.
Donc $\mathrm{Tr}\ UE_{ij} = u_{ji}$.

ii) Soit $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(\lambda.U + V)(M) &= \tau_{\lambda.U+V}(M) \\ &= \mathrm{Tr}\ ((\lambda.U + V)M) \\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}\,(UM) + \mathrm{Tr}\,(VM) \\ &= \lambda\tau_U(M) + \tau_V(M) \\ &= \lambda f(U)(M) + f(V)(M) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(\lambda.U+V)=\lambda f(U)+f(V)$ *i.e.* f est linéaire.
Considérons $U \in \mathrm{Ker}\,(f)$ alors :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \tau_U(M)=0 \quad i.e. \quad \mathrm{Tr}\,(UM)=0.$$

En particulier pour $M=E_{ij}$, d'après i), $\mathrm{Tr}\,(UM)=u_{ij}=0$. Cette égalité étant valable pour tout i, j, la matrice U est nulle donc f est injectif.
Ainsi, f est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriel de même dimension finie (partie 1) donc $\boxed{f \text{ est un isomorphisme}}$ ce qui donne :

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*,\ \exists! U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \varphi=\tau_U}$$

c'est-à-dire :

iii) D'après la question IV.3.b, il existe $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ telle que $\tau_A=\varphi\circ\gamma_A$.
Mais d'après la question précédente, il existe une (unique) matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi=\tau_B$.
Finalement, on a montré l'existence (et l'unicité) de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\boxed{\tau_A=\tau_B\circ\gamma_A}$.

d) La relation précédente donne :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}\,(AM)=\mathrm{Tr}\,\big(B(AM-MA)\big)$$

d'où en utilisant les propriétés de l'application Tr :

$$\begin{aligned}\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}\,(AM) &= \mathrm{Tr}\,(BAM-BMA)\\ &= \mathrm{Tr}\,(BAM)-\mathrm{Tr}\,(BMA)\\ &= \mathrm{Tr}\,(BAM)-\mathrm{Tr}\,(ABM)\\ &= \mathrm{Tr}\,\big((BA-AB)M\big)\end{aligned}$$

ce qui montre que les deux formes linéaires suivantes sont égales :

$$M \mapsto \mathrm{Tr}\,(AM) \ \text{ et } \ M \mapsto \mathrm{Tr}\,\big((BA-AB)M\big)$$

D'après l'unicité de la matrice U dans le résultat de la question IV.3.c.ii., on en déduit que : $\boxed{A=BA-AB}$.

4) a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{Q}(k)$: « $BA^k-A^kB=kA^k$ » dépendant de $k \in \mathbb{N}^*$.

- Par hypothèse, on a $BA-AB=A$ donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(k)$ soit vraie, montrons que $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.
  Puisque $\mathcal{Q}(k)$ est supposée vraie par hypothèse de récurrence, on a $BA^k-A^kB=kA^k$.
  Alors :

$$\begin{aligned}A^{k+1} &= AA^k\\ &= (BA-AB).A^k\\ &= BA^{k+1}-A(BA^k)\\ &= BA^{k+1}-A(kA^k+A^kB)\\ &= BA^{k+1}-kA^{k+1}-A^{k+1}B\end{aligned}$$

  d'où $(k+1)A^{k+1}=BA^{k+1}-A^{k+1}B$ et $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.
- On a $\mathcal{Q}(1)$ vraie et : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \big(\mathcal{Q}(k)\Rightarrow\mathcal{Q}(k+1)\big)$.
  D'après le théorème de récurrence, $\mathcal{Q}(k)$ est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  On a donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, BA^k-A^kB=kA^k.}$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la relation précédente s'écrit : $\gamma_B(A^k) = kA^k$.

Ainsi : $\boxed{\text{si } A^k \text{ est non nulle alors } A^k \text{ est un vecteur propre de } \gamma_B \text{ associé à la valeur propre } k.}$

c) Supposons A non nilpotente alors A^k est non nulle pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après les deux question précédentes, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est un vecteur propre de γ_B associé à la valeur propre k.

En particulier, γ_B admet une infinité de valeurs propres distinctes ce qui n'est pas possible pour un endomorphisme en dimension finie.

Donc $\boxed{A \text{ est nilpotente.}}$

5) D'après 4.3.d) (sens direct) et 4.4.c) (réciproque), nous avons montré

$$\boxed{A \text{ nilpotente si et seulement si il existe } B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = BA - AB.}$$

Exercice 2 (Agro-Véto 2014)

1) Équation de F dans la base $\mathscr{B}$.

a) La famille (e_1', e_2') est une base de F, donc elle est libre.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut donc la compléter en une base $\mathscr{B}'$ de E.

De plus, $\dim E = 3$ donc il ne manque qu'un vecteur : il existe $e_3' \in E$ tel que $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ soit une base de E.

b) $\boxed{X = PX'}$.

c) D'après ci-dessus, $X' = P^{-1}X$. En effectuant le produit matriciel, le dernier coefficient s'écrit :

$$\boxed{x_3' = ax_1 + bx_2 + cx_3}$$

d) Pour tout $x \in E$, par définition de $\mathscr{B}'$,

$$x \in F \iff x \in \operatorname{Vect}(e_1', e_2') \iff x_3' = 0$$

Or, d'après c), $x_3' = ax_1 + bx_2 + cx_3$. Donc

$$\boxed{x \in F \iff ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0}$$

2) Condition nécessaire et suffisante de stabilité de F par f :

a) Supposons F stable par F.

i) Comme F est stable par f, $f(e_1') \in F = \operatorname{Vect}(e_1', e_2')$, c'est-à-dire $f(e_1') = \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2'$.

De même, $f(e_2') = \beta_1 e_1' + \beta_2 e_2' \in F$.

Posons $f(e_3') = \gamma_1 e_1' + \gamma_2 e_2' + \gamma e_3'$. Alors, la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$ s'écrit :

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}$$

ii) D'après la formule de changement de base *(seule formule liant A, A' et P… donc de toute façon, il n'y a pas le choix, on écrit et on réfléchit* ***après****, avec la formule sous les yeux)* :

$$A = PA'P^{-1}$$

D'où $P^{-1}A = A'P^{-1}$, puis en passant à la transposée

$$\boxed{{}^t(P^{-1})\,{}^tA' = {}^tA\,{}^t(P^{-1})}$$

iii) On écrit ces matrices sous forme blocs (on peut aussi faire les calculs avec les coeffs) :

$$^tA' = \begin{pmatrix} ^tB' & 0 \\ ^tC' & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ^t(P^{-1}) = \begin{pmatrix} Q & V \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Alors $\quad ^t(P^{-1})^tA' = \begin{pmatrix} Q & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ^tB' & 0 \\ ^tC' & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^tB' + V^tC' & \gamma V \end{pmatrix}$ Donc en identifiant le

et $\quad ^tA^t(P^{-1}) = {}^tA\begin{pmatrix} QV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^tAQ & ^tAV \end{pmatrix}$

dernier bloc de chacune des deux matrices (i.e. la dernière colonne) :

$$\gamma V = {}^tAV$$

De plus, $V \neq 0$ car $V = 0$ entraîne $\mathrm{rg}\,(P) \leqslant 2$ ce qui est absurde pour une matrice inversible.

Par conséquent $\boxed{V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } {}^tA}$

b) Réciproquement, supposons que $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ^tA associé à la valeur propre γ.

i) Par définition, $^tAV = \gamma V$. Donc en passant à la transposée $^tVA = \gamma^tV$, ce qui s'écrit :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} A = \gamma \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}}$$

ii) On multiplie à droite par le vecteur colonne X l'égalité matricielle précédente :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} AX = \gamma \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} X$$

Or $AX = Y$ donc $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} AX = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = ay_1 + by_2 + cy_3$.

Et $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} X = ax_1 + bx_2 + cx_3$.

Conclusion : $\boxed{ay_1 + by_2 + cy_3 = \gamma(ax_1 + bx_2 + cx_3)}$

iii) Soit $x \in F$, montrons que $y = f(x) \in F$:

$$\begin{aligned} x \in F &\implies ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 && \text{(d'après 1)d))} \\ &\implies ay_1 + by_2 + cy_3 = \gamma(ax_1 + bx_2 + cx_3) = 0 && \text{(d'après ii))} \\ &\implies y \in F && \text{(d'après 1)d))} \end{aligned}$$

Ainsi, $f(F) \subset F$: $\boxed{F \text{ est stable par } f}$

3) Un exemple.

a)
- Valeurs propres :

Calcul du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = \det(xI_3 - A) &= \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 \\ x-2 & x-1 & 0 \\ -(x-2) & -1 & x-2 \end{vmatrix} \qquad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3) \\ &= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & x-1 & 0 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & -2 & x-4 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x(x-4)+4) = (x-2)(x^2-4x+4) = \boxed{(x-2)^3} \end{aligned}$$

Donc la seule valeur propre de A est $\boxed{\lambda = 2}$, de multiplicité 3.

- Si A était diagonalisable, elle serait semblable à $2I_3$, donc $A = P2I_3P^{-1} = 2PP^{-1} = 2I_3$.
  Or $A \neq 2I_3$, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$
  (On peut aussi calculer E_2, on en aura de toute façon besoin en d))
- Le polynôme caractéristique de A est scindé, donc $\boxed{A \text{ est trigonalisable}}$

b) La transposition ne change pas le déterminant : $\det {}^tN = \det N$. Et la transposition est linéaire. Donc

$$\chi_M(x) = \det(xI_n - M) = \det({}^t(xI_n - M)) = \det(x{}^tI_n - {}^tM) = \det(xI_n - {}^tM) = \chi_{{}^tM}(x)$$

Par conséquent, $\boxed{M \text{ et } {}^tM \text{ ont les mêmes valeurs propres}}$

c) D'après 3)a), la seule valeur propre de A est $\lambda = 2$.
Donc d'après 3)b), la seule valeur propre de ${}^tA$ est aussi $\lambda = 2$.

D'après 2), F d'équation $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.
Déterminons les sous-espaces propres de ${}^tA$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -b + c & = & 0 \\ -2a & = & 0 \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Donc $E_2 = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
Deux vecteurs colinéaire déterminent le même plan (simple multiplication de l'équation par une constante K), donc

$$\boxed{\text{Le seul plan stable est } F \text{ d'équation } y + z = 0 \text{ dans la base } \mathscr{B}}$$

d) Si $D = \mathrm{Vect}\,(u)$ est une droite (donc $u \neq 0$) stable, alors pour tout $x \in \mathrm{Vect}\,(u)$, $f(x) \in D$.
En particulier pour $x = u$: $f(u) \in D = \mathrm{Vect}\,(u)$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ f(u) = \lambda u$.
Par conséquent u est un vecteur propre pour une valeur propre λ.
Réciproquement, si u est un vecteur propre pour une valeur propre λ, alors $f(u) = \lambda u$, et donc $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathrm{Vect}\,(u)$.
Donc les droites stables sont exactement les droites de la forme $\mathrm{Vect}\,(u)$ avec u un vecteur propre de A.
Déterminons le sous-espace propre de A :

$$X \in E_2(A) \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff X \in \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La droite stable par } f \text{ est } \mathrm{Vect}\,(e_1 + e_2 - e_3)}$$