Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (PT A 2010, partiel)

Le problème se compose de quatre parties. Les trois premières sont totalement indépendantes entre elles. La quatrième utilise les résultats des parties précédentes mais peut se traiter en admettant ces résultats.
Si A est une matrice, on note ${}^tA$ sa transposée. $\mathrm{Tr}\,(A)$ désigne la trace de A.
On identifie dans tout ce problème $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des matrices colonnes à n lignes.
On note E^* l'espace $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires sur E. Par exemple $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$ sera l'ensemble des applications linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Dans tout le problème, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications suivantes :

$$\varphi_A : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}, \qquad \tau_A : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}\,(AM) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \gamma_A : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Partie 1 (Questions préliminaires)

1) Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, les applications φ_A, τ_A et γ_A sont linéaires.

2) Donner la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et celle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$.

3) Énoncer le théorème de la base incomplète.

Partie 2 (Un exemple)

Dans cette partie, et dans cette partie seulement, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2) La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser une base de vecteurs propres.

3) On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que la famille $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Calculer $\varphi_A(E_{ij})$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. Donner la matrice de φ_A dans la base $\mathscr{B}$.

c) L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ? Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de φ_A (on rappelle qu'ici un vecteur propre sera une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$).

Partie 3 (Réduction de l'endomorphisme φ_A)

On se fixe désormais $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\varphi_A(M) = \lambda M$.
Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

2) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de φ_A, c'est également une valeur propre de A.

3) Soit μ une valeur propre de A, X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \mu X$. Soit M une matrice dont une colonne est égale à X et toutes les autres colonnes sont nulles.
Montrer que M est un vecteur propre de φ_A.

4) Donner l'ensemble des valeurs propres de φ_A.

5) Montrer que si A est diagonalisable, φ_A l'est également (on pourra, à partir d'une base de vecteurs propres de A, construire une base de vecteurs propres de φ_A).

Partie 4 (Une caractérisation des matrices nilpotentes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

1) Montrer que si λ est une valeur propre (éventuellement complexe) de A, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ^k est une valeur propre de A^k.

2) On suppose A nilpotente.

- **a)** Montrer que la seule valeur propre de A est 0.
- **b)** Montrer que $\mathrm{Tr}\ A = 0$.

3) On suppose toujours A nilpotente.

- **a)** Soit M une matrice telle que $AM = MA$. Montrer que la matrice AM est encore nilpotente.
- **b)** En déduire que $\mathrm{Ker}\ \gamma_A \subset \mathrm{Ker}\ \tau_A$.
  On admettra[1] qu'il existe alors $w : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $\tau_A = w \circ \gamma_A$.
- **c)** **i)** Si $E_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice ayant un 1 en i-ème ligne, j-ème colonne, et 0 ailleurs, et $U = (u_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, calculer le produit UE_{ij} puis $\mathrm{Tr}\,(UE_{ij})$.
  ii) Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^* \\ U & \mapsto & \tau_U \end{array}$ est linéaire et injective.
  En déduire que f est un isomorphisme.
  iii) En déduire qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A$.
- **d)** Montrer que $A = BA - AB$.

4) On suppose maintenant qu'il existe une matrice B telle que $A = BA - AB$.

- **a)** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $BA^k - A^kB = kA^k$.
- **b)** À quelle condition la matrice A^k est-elle un vecteur propre de γ_B ?
- **c)** En déduire que A est nilpotente.

5) Quelle caractérisation des matrices nilpotentes a-t-on obtenue ?

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $F \subset E$ un plan — un sous-espace vectoriel de dimension 2 — de base (e'_1, e'_2).
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E, de matrice $A = \mathrm{Mat}\,(f, \mathscr{B})$ dans la base $\mathscr{B}$.

1) Équation de F dans la base $\mathscr{B}$.

- **a)** Justifier l'existence de e'_3 tel que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de E.
  On suppose désormais cette base $\mathscr{B}'$ construite.
- **b)** Soit $P \in GL_3(\mathbb{R})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Soit $x \in E$, de matrice colonne X dans la base $\mathscr{B}$ et X' dans $\mathscr{B}'$. Rappeler la formule de changement de bases liant ces différentes matrices.
- **c)** On note $P^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$.
  Donner l'équation liant x'_3 et x_1, x_2, x_3.

1. Ce théorème de factorisation, présent dans le sujet d'origine, est l'exercice 17 de la feuille d'algèbre linéaire.

d) Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$x \in F \Longleftrightarrow ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

2) Condition nécessaire et suffisante de stabilité de F par f :

Montrons que F est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

a) Supposons F stable par f.

i) Montrer que la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$ s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Dans la suite on notera $A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $B' \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $C' \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

ii) Montrer que ${}^t(P^{-1}){}^tA' = {}^tA^t(P^{-1})$.

iii) En déduire que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

b) Réciproquement, supposons que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre γ.

i) Justifier que $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} A = \gamma \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

ii) Soit $x \in E$ de matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$, et $y = f(x)$ de matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
Montrer que $ay_1 + by_2 + cy_3 = \gamma(ax_1 + bx_2 + cx_3)$.

iii) En déduire que F est stable par f.

3) Un exemple. On suppose désormais que f a pour matrice dans la base $\mathscr{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les (ou la) valeur(s) propre(s) de A. A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

b) Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que M et ${}^tM$ ont les mêmes valeurs propres.

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels F de E de dimension 2 stables par f.

d) Déterminer les droites de E stables par f (on justifiera soigneusement).

FIN DE L'ÉPREUVE