Épreuve de Mathématiques 4

$\boxed{\text{Correction}}$

Exercice 1 (E3A MP 2013 B)

1) a) Soit $X, Y \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\varphi(\lambda X + Y) = \Big(\lambda X + Y\Big) = \lambda \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\varphi(X) + \varphi(Y)$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire}}$

b) Montrons que l'application φ est injective :

$$X \in \text{Ker } \varphi \Longrightarrow \varphi(X) = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow X = 0$$

Donc Ker $\varphi = \{0\}$, et φ est injective. Par conséquent $\varphi_{|\text{ Ker } A}$ aussi.
Montrons que l'image de $\varphi_{|\text{ Ker } A}$ est exactement Ker M_A :

$$Z = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \text{Ker } M_A \Longleftrightarrow M_A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ AX_1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} X_2 = 0 \\ AX_1 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} Z = \varphi(X_1) \\ X_1 \in \text{Ker } A \end{array} \right.$$

Donc Ker M_A = Im $\varphi_{|\text{ Ker } A}$. Or $\varphi_{|\text{ Ker } A}$ est linéaire (1)), injective, surjective sur son image Ker M_A, donc un isomorphisme.
Par conséquent $\boxed{\dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } M_A}$

c) Nous allons utiliser le théorème du rang :
Si $f : E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de dimension finie, alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

Donc ici le théorème du rang appliqué à M_A puis à A s'écrit

$$\text{rg } M_A = \dim \text{Im } M_A = \dim \mathbb{C}^{2n} - \dim \text{Ker } M_A = 2n - \dim \text{Ker } A = n - \text{rg } A$$

En conclusion : $\boxed{\text{rg } M_A = n - \text{rg } A}$

2) a) Après calcul bloc 2×2, qui s'effectue comme une multiplication de matrices 2×2, on trouve

$$\boxed{M_A^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}}$$

b) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Notons $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & PP^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

Donc $Q \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$. De plus, avec $D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, on a

$$QD'Q^{-1} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = M_A^2$$

Donc $\boxed{\text{La matrice } M_A^2 \text{ est diagonalisable}}$

Au brouillon, on écrira a priori dans l'autre sens, en partant de M_A et en remplaçant A par son expression. Au propre, retourner les calculs.

c) La matrice M_A^2 est diagonale bloc, donc $\det M_A^2 = (\det A)^2$. Or A inversible, donc $\det A \neq 0$. Ainsi, $\det M_A^2 \neq 0$ et $\boxed{M_A^2 \text{ est inversible}}$

d) Ceci n'est pas une question : on admet que les questions précédentes nous permettent de prouver que M_A est diagonalisable (via du calcul et un résultat hors programme).

3) a) Soit $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base de vecteurs propres, où e_i est associé à la valeur propre λ_i. On suppose de plus que $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de Ker $M_A = E_0$, sous-espace propre pour la valeur propre $\lambda = 0$ (i.e. $\lambda_i = 0$ si $i \leqslant k$ et $\lambda_i \neq 0$ si $i > k$). Alors

$$\text{Im } M_A = \text{Vect}\,(M_A e_1, \ldots, M_A e_{2n}) = \text{Vect}\,(\lambda_{k+1} e_{k+1}, \ldots, \lambda_{2n} e_{2n}) = \text{Vect}\,(e_{k+1}, \ldots, e_{2n})$$

En appliquant de nouveau M_A, il vient

$$\text{Im } M_A^2 = \text{Vect}\,(M_A e_{k+1}, \ldots, M_A e_{2n}) = \text{Vect}\,(e_{k+1}, \ldots, e_{2n}) = \text{Im } M_A$$

Conclusion : $\boxed{\text{Im}\,(M_A) = \text{Im}\,(M_A^2)}$

b) $X \in \text{Ker } M_A \Longrightarrow M_A X = 0 \Longrightarrow M_A^2 X = M_A 0 = 0 \Longrightarrow X \in \text{Ker } M_A^2$.
Donc Ker $M_A \subset$ Ker M_A^2.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } M_A^2 = 2n - \dim \text{Im } M_A^2$. Or d'après a), Im $M_A^2 =$ Im M_A. En remplaçant et en appliquant de nouveau le théorème du rang, il vient :

$$\dim \text{Ker } M_A^2 = 2n - \dim \text{Im } M_A = \dim \text{Ker } M_A$$

Donc $\dim \text{Ker } M_A = \dim \text{Ker } M_A^2$, et Ker $M_A \subset$ Ker M_A^2.
Par conséquent $\boxed{\text{Ker}\,(M_A) = \text{Ker}\,(M_A^2)}$

c) Soit $X \in$ Ker A.

$$M_A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = M_A \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ AX \end{pmatrix} = 0$$

Donc $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} \in \text{Ker } M_A^2 = \text{Ker } M_A$ (d'après b)). Ainsi $M_A Z = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, et $X = 0$.
Conclusion : Ker $A = \{0\}$.
Donc l'endomorphisme associé à A est injectif, dans $\mathbb{C}^n$ de dimension finie, donc bijectif.
Ce qui signifie que $\boxed{A \text{ est inversible}}$

d) Comme $M_A^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{C}^{2n}$ engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique est laissé stable par M_A^2. De plus, M_A^2 est diagonalisable (par hypothèse), donc $\widetilde{u}$, la restriction à F, est aussi diagonalisable. Or la matrice de $\widetilde{u}$ dans la base canonique est exactement A : $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable}}$

4) On a démontré : $\boxed{M_A \text{ est diagonalisable} \Longleftrightarrow A \text{ est diagonalisable et inversible.}}$

Exercice 2 (CCP PC 2010)

Partie 1

1) a) Première ligne : $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$. Seconde ligne : $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$.

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 & -7 \\ -8 & -4-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & -7 \\ -4+\lambda & -4-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -1 & -4-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

b) • $\underline{E_0}$: Soit $x \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Résolvons le système $AX = 0$.

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + 7L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - 8L_3 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1/4 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + L_1 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $x_3 = 0$ et $x_2 = -2x_1$. Ainsi $\boxed{E_0 = \mathrm{Vect}\left((1,-2,0)\right).}$

• $\underline{E_1}$: Soit $x \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Résolvons le système $(A - I_3)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -7 \\ -8 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -8 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & -L_1 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - 8L_1 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $x_2 = 0$ et $x_3 = x_1$. Ainsi $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\left((1,0,1)\right).}$

• $\underline{E_4}$: Soit $x \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Résolvons le système $(A - 4I_3)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ -8 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - 7/3L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + L_2 + L_3 \\ L_3 & \leftarrow & -L_3/3 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1/4 \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $x_3 = 0$ et $x_2 = -x_1$. Ainsi $\boxed{E_4 = \mathrm{Vect}\left((1,-1,0)\right).}$

Posons $v_1 = (1,-2,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (1,-1,0)$. Par construction,

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

c) La matrice de f^m est A^m dans la base canonique, et D^m dans la base (v_1, v_2, v_3). Donc la formule de changement de base nous donne

$$\boxed{A^m = PD^mP^{-1}}$$

d) D'après les calculs de la question 1b, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculons P^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_3 \\ L_3 & \leftarrow & L_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1}}$$

Ainsi, d'après 1c, $A^m = PD^mP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} P^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 2.4^m & 4^m & 1-2.4^m \\ -2.4^m & -4^m & 2.4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

On vérifie ses calculs $m = 1$ ($A^1 = A$). Si on veut le faire en $m = 0$ ($A^0 = I_3$), il faut prendre garde au fait que $0^0 = 1$, or on a remplacé 0^m par 0...

e) Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commute avec D, c'est-à-dire telle que $MD = DM$.

$$MD = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 4c_1 \\ 0 & b_2 & 4c_2 \\ 0 & b_3 & 4c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 4a_3 & 4b_3 & 4c_3 \end{pmatrix} = DM$$

Ainsi $a_2 = a_3 = 0$, $b_1 = b_3 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$, et $M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$. Réciproquement, si M est diagonale, elle commute avec D.

Conclusion : $\boxed{\text{Les matrices qui commutent avec } D \text{ sont exactement les matrices diagonales.}}$

f) Soit $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $H^2 = D$.

$$HD = H.H^2 = H^3 = H^2.H = DH$$

Ainsi $\boxed{H \text{ et } D \text{ commutent.}}$

g) Soit H telle que $H^2 = D$. Alors H commute avec D, donc d'après la question 1e, H est diagonale. L'égalité $H^2 = D$ s'écrit donc

$$H^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi $a = 0$, $b = \pm 1$ et $c = \pm 2$. Réciproquement, ces matrices conviennent, donc les matrices H de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$ sont

$$\boxed{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}}$$

Pour déterminer les matrices dans la base canonique de tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2=f$, il suffit d'appliquer la formule de changement de base $\operatorname{Mat}(h,\mathscr{B})=PHP^{-1}$, avec H les quatre matrices précédentes.

$$\boxed{\begin{pmatrix}4\varepsilon_2&2\varepsilon_2&-4\varepsilon_2\\-4\varepsilon_2&-2\varepsilon_2&4\varepsilon_2\\0&0&\varepsilon_1\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad\varepsilon_1\in\{-1,1\}\text{ et }\varepsilon_2\in\{-1,1\}}$$

2) a) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(m):\quad J^m=3^{m-1}J$$

est vraie pour tout $m\geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_m\Longrightarrow\mathcal{H}_{m+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(m)$ vraie. $J^2=3J$, donc $J^{m+1}=3^{m-1}JJ=3^mJ$, donc $\mathcal{H}(m+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall m\geqslant 1\qquad J^m=3^{m-1}J}$

b) En termes d'applications linéaires, la question précédente s'écrit $j^m=3^{m-1}j$ pour tout $m\geqslant 1$. Ainsi, puisque $f=\mathrm{id}+j$ et que j et id commutent, la formule du binôme nous donne, pour $m\geqslant 1$,

$$f^m=(\mathrm{id}+j)^m=\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}j^k=\mathrm{id}+\sum_{k=1}^m\binom{m}{k}3^{k-1}j=\mathrm{id}+\frac{1}{3}\left(-1+\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}3^k\right)j=\mathrm{id}+\frac{1}{3}(4^m-1)j$$

Cette relation est encore vérifiée en 0, ainsi $\boxed{\text{Pour tout } m\in\mathbb{N},\ f^m=\mathrm{id}+\frac{1}{3}(4^m-1)j.}$

c) $\chi_f(X)=\det(f-X\,\mathrm{id})=\begin{vmatrix}2-X&1&1\\1&2-X&1\\1&1&2-X\end{vmatrix}=(1-X)^2(4-X)$

Par conséquent $\boxed{f\text{ admet deux valeurs propres distinctes, }\lambda=1\text{ et }\mu=4.}$

d) i) D'après la question 2b, $f^m=\left(\mathrm{id}-\frac{1}{3}j\right)+4^m\left(\frac{1}{3}j\right)$, donc $\boxed{p=\mathrm{id}-\frac{1}{3}j\text{ et }q=\frac{1}{3}j}$ conviennent.

ii) Soit (p_1,q_1) et (p_2,q_2) deux couples d'endomorphismes vérifiant $\forall m\in\mathbb{N}\quad f^m=p_i+4^mq_i$. Ainsi, $\forall m\in\mathbb{N}\quad(p_1-p_2)+4^m(q_1-q_2)=0$, et en particulier

$$\left\{\begin{array}{rcrcl}(p_1-p_2)&+&(q_1-q_2)&=&0\\(p_1-p_2)&+&4(q_1-q_2)&=&0\end{array}\right.$$

Et en résolvant ce système, on trouve $p_1=p_2$ et $q_1=q_2$. Donc $\boxed{\text{ce couple est unique.}}$

iii) Soit $(\alpha,beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\alpha p+\beta q=0$. D'après d)i., il vient

$$0=\alpha p+\beta q=\alpha\left(\mathrm{id}-\frac{1}{3}j\right)+\beta\left(\frac{1}{3}j\right)=\alpha\,\mathrm{id}+(\beta-\alpha)\frac{1}{3}j$$

Or id et j ne sont pas colinéaires, donc $\alpha=0$ et $\beta=\alpha=0$.

Conclusion : $\boxed{(p,q)\text{ forme une famille libre.}}$

e) i) $p^2=\mathrm{id}-\frac{2}{3}j+\frac{1}{9}(3j)=\mathrm{id}-\frac{1}{3}j=p$ et $q^2=\frac{1}{9}(3j)=q$. Donc $\boxed{p\text{ et }q\text{ sont des projecteurs.}}$

$p\circ q=(\mathrm{id}-\frac{1}{3}j)\circ(\frac{1}{3}j)=\frac{1}{j}-\frac{1}{9}(3j)=0$ et $q\circ p=q\circ p=0$ (car ce sont des polynômes en j).

ii) Soit $h = \alpha p + \beta q$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$h^2 = (\alpha p + \beta q)^2 = \alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$$

Donc $h^2 = f$ équivaut à $\alpha^2 p + \beta^2 q = p + 4q$ (par construction de p et q). Or (p, q) est libre, donc $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$. En conclusion les h qui conviennent sont les suivants

$$\boxed{p + 2q \qquad -p + 2q \qquad p - 2q \qquad -p - 2q}$$

f) • $\underline{E_1}$: Soit $x \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Le système $(A - I_3)X = 0$ s'écrit $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ainsi $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\,((1, -1, 0), (1, 0, -1)).}$

• $\underline{E_4}$: Méthode 1 : comme dans la question 2 de la partie 1.
Méthode 2 : $\dim E_4 = 1$ et $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre 4, donc $\boxed{E_4 = \mathrm{Vect}\,((1, -1, 0)).}$

En conclusion, f est diagonalisable dans la base de vecteurs propres $\boxed{((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)).}$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}\,(p, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}\,(q, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Matrices de p et q : $q = \frac{1}{3}(f - \mathrm{id}\,)$ et $p = -\frac{1}{3}(f - \mathrm{id}\,) + \mathrm{id}\,$.

g) $\boxed{K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)}$ *(il faut raisonner par blocs)*

h) Soit h l'endomorphisme de matrice Y dans la base $\mathscr{B}'$ des vecteurs propres. Par construction, $Y^2 = D$, ce qui se traduit par $h^2 = f$ en termes d'endomorphismes. Or $h = \alpha p + \beta q$ signifie $\beta = 2$ et K diagonale, ce qui n'est pas le cas.

Donc $\boxed{h \text{ vérifie } h^2 = f \text{ mais n'est pas combinaison linéaire de } p \text{ et } q.}$

Partie 2

1) $(f - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}\,) = f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu\,\mathrm{id} = \lambda^2 p + \mu^2 q - (\lambda + \mu)(\lambda p + \mu q) + \lambda\mu(p + q) = 0$
Ainsi $P(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$ annule f. Donc, si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f, $P(\alpha) = 0$.
Conclusion : $\boxed{(f - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}\,) = 0 \text{ et les seules valeurs propres possibles de } f \text{ sont } \lambda \text{ et } \mu.}$

2) $\boxed{f - \lambda\,\mathrm{id} = \lambda p + \mu q - \lambda p - \lambda q = (\mu - \lambda)q.}$ De même $\boxed{f - \mu\,\mathrm{id} = (\lambda - \mu)p.}$

3) $0 = (f - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}\,) = (\mu - \lambda)q \circ (\lambda - \mu)p = -(\mu - \lambda)^2 q \circ p$. Or $\lambda \neq \mu$, donc $\boxed{q \circ p = 0.}$
De même, $\boxed{p \circ q = 0}$.

Par définition, $p = \mathrm{id}\, - q$, donc $0 = p \circ q = (\mathrm{id}\, - q) \circ q = q - q^2$. Ainsi, $\boxed{q^2 = q}$. De même, $\boxed{p^2 = p}$
Montrons que $\mathrm{Ker}\ q = \mathrm{Im}\ p$:

$\boxed{\subset}$
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\ q &\implies q(x) = 0 \\ &\implies x - p(x) = 0 \qquad (\text{car } q = \mathrm{id}\, - p) \\ &\implies x = p(x) \\ &\implies x \in \mathrm{Im}\ p \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\ q \subset \mathrm{Im}\ p$.

$\boxed{\supset}$
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Im}\ p &\implies \exists y \in E\ x = p(y) \\ &\implies \exists y \in E\ q(x) = q \circ p(y) = 0 \qquad (\text{car } q \circ p = 0) \\ &\implies q(x) = 0 \\ &\implies x \in \mathrm{Ker}\ q \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Ker}\ q$.

En conclusion $\boxed{\mathrm{Ker}\ q = \mathrm{Im}\ p}$

4) L'application p est un projecteur, donc $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. On vient de montrer que $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$, donc $\boxed{E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q.}$
D'après la question 2, $f - \lambda \operatorname{id} = (\mu - \lambda) q$, avec $(\mu - \lambda) \neq 0$ donc $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}) = \operatorname{Ker} q$.
De même, $\operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{id}) = \operatorname{Ker} p$. Donc nous venons de montrer que

$$E = \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}) = E_\mu \oplus E_\lambda$$

Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$
Dans une base $\mathscr{B}'$ de E réunion d'une base de $E_\mu = \operatorname{Ker} p$ et d'une base de $E_\lambda = \operatorname{Im} p$ (dans cet ordre), la matrice de p est diagonale avec $n_\mu = \dim E_\mu$ zéros suivis de $n_\lambda = \dim E_\lambda$ un.

$$\boxed{\operatorname{Mat}(p, \mathscr{B}', \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Mat}(f, \mathscr{B}', \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} \mu & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \mu & & & \\ & & & \lambda & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}}$$

Avec une notation blocs : $\operatorname{Mat}(p, \mathscr{B}', \mathscr{B}') = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n_\mu} & (0) \\ \hline (0) & I_{n_\lambda} \end{array}\right)$ et $\operatorname{Mat}(f, \mathscr{B}', \mathscr{B}') = \left(\begin{array}{c|c} \mu I_{n_\mu} & (0) \\ \hline (0) & \lambda I_{n_\lambda} \end{array}\right)$.

5) Les seules valeurs propres de f sont λ et μ, qui sont non nulles, donc $\boxed{f \text{ est inversible}}$ (elle n'admet pas 0 pour valeur propre). Montrons que $\dfrac{1}{\lambda} p + \dfrac{1}{\mu} q$ est l'inverse de f.

$$(\lambda p + \mu q) \circ \left(\frac{1}{\lambda} p + \frac{1}{\mu} q\right) = p^2 + \frac{\lambda}{\mu} pq + \frac{\mu}{\lambda} qp + q^2 = p + q = \operatorname{id}$$

et de même $\left(\dfrac{1}{\lambda} p + \dfrac{1}{\mu} q\right) \circ (\lambda p + \mu q) = \operatorname{id}$. Donc $\boxed{f^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} p + \dfrac{1}{\mu} q}$.

6) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(m) : \quad f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

est vraie pour tout $m \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse : $\operatorname{id} = p + q$.
- $\underline{\mathcal{H}_m \Longrightarrow \mathcal{H}_{m+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(m)$ vraie.

$$f^{m+1} = (\lambda^m p + \mu^m q)(\lambda p + \mu q) = \lambda^{m+1} p + \mu^{m+1} q$$

  Donc $\mathcal{H}(m+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall m \geqslant 0 \qquad f^m = \lambda^m p + \mu^m q}$

Le résultat que l'on vient de prouver appliqué à $f^{-1} = \lambda' p + \mu' q$, avec $\lambda' = 1/\lambda$ et $\mu' = 1/\mu$ s'écrit

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad (f^{-1})^m = \lambda'^m p + \mu'^m q = \lambda^{-m} p + \mu^{-m} q$$

En conclusion : $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{Z},\ f^m = \lambda^m p + \mu^m q.}$

7) Montrons que (p, q) est libre : soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha p + \beta q = 0$.
Soit $x \in \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q$, non nul. Il vient $\alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha x + 0 = 0$, donc $\alpha = 0$.
De plus, $q \neq 0$ par hypothèse, donc $\beta q = 0$ entraîne $\beta = 0$.
Donc $\alpha = \beta = 0$, et (p, q) est libre.
Par conséquent $\boxed{\dim F = \dim \operatorname{Vect}(p, q) = 2.}$

8) Soit $h \in \mathscr{R}(f) \cap F$: $h = \alpha p + \beta q$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = \lambda p + \mu q = f$$

Or d'après la question 7, (p, q) est une famille libre, donc $\alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu$. Finalement il vient

$$\boxed{\mathscr{R}(f) \cap F = \left\{\varepsilon_1 \sqrt{\lambda} p + \varepsilon_2 \sqrt{\mu} q \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2\right\}}$$

9) Procédons comme en 1.2)g). Soit la K la matrice au moins 2×2 diagonale blocs définie par

$$\boxed{K = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & (0) \\ 1 & 0 & \\ \hline (0) & & I_{k-2} \end{array}\right)}$$

Ainsi $K^2 = \begin{pmatrix} I_2 & (0) \\ (0) & I_{k-2} \end{pmatrix} = I_k$.

10) Comme f est diagonalisable, la multiplicité de λ est égale à la dimension de $E_\lambda = \operatorname{Im} p$ (d'après 3 et 4). Ainsi $\boxed{\dim \operatorname{Im} p \geqslant 2.}$

D'après la question 4, $\operatorname{Mat}(p, \mathscr{B}', \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_\lambda} \end{pmatrix}$. Soit p' l'endomorphisme de matrice $M_{p'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}'$. Ainsi, puisque $K^2 = I_{n_\lambda}$ par construction de K, $p'^2 = p$.

De plus, $q = \mathrm{id} - p$ donc $M_q = \operatorname{Mat}(q, \mathscr{B}', \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} I_{n_\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $M_q M_{p'} = M_{p'} M_q = 0$ par calcul blocs.

Conclusion : $\boxed{\text{Il existe un endomorphisme } p' \in \mathscr{L}(E),\ p' \notin F, \text{ tel que } p'^2 = p \text{ et } p' \circ q = q \circ p' = 0.}$

11) Supposons $\dim E \geqslant 3$. L'application f est diagonalisable avec pour valeurs propres λ et μ, donc

$$\dim E_\lambda + \dim E_\mu = \dim E \geqslant 3$$

Ainsi soit E_λ soit E_μ est de dimension supérieure ou égale à 2. Quitte à permuter λ et μ, on peut supposer $\dim E_\lambda \geqslant 2$.
Dans ce cas, d'après la question 10, il existe $p' \notin F$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$. Soit un tel p'. Posons $h = \sqrt{\lambda} p' + \sqrt{\mu} q$. Alors

$$h^2 = \lambda p'^2 + (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu})(p'q + qp') + \mu q^2 = \lambda p + 0 + \mu q = f$$

Donc $h \in \mathscr{R}(f)$, et par construction de p', $h \notin F$.
Conclusion : $\boxed{\mathscr{R}(f) \not\subset F}$

Partie 3 (incomplète)

1) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$. Par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$, donc en sommant sur k

$$P(f) = \sum_{k=0}^{N} a_k f^k = \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$$

(Lorsqu'on a une double somme (finie !) et qu'on ne sait pas quoi faire, dans le doute, intervertir.)

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } P \in \mathbb{R}[X], \text{ on a : } P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i}$

2) Appliquons le résultat précédent au polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$, en remarquant que $P(\lambda_i) = 0\ \forall i$.

$$P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i = \sum_{i=1}^{m} 0 \times p_i = 0$$

(ce n'est pas parce qu'on ne sait pas où l'on va qu'il ne faut pas se laisser guider par l'énoncé : un polynôme nous tend les bras, et on nous dit « en déduire » — ça ne coûte rien d'essayer)

Conclusion : $\boxed{\prod_{i=1}^{m}(f - \lambda_i \,\mathrm{id}\,) = 0}$

3) Soit $\ell \in \{1, \dots m\}$. L_ℓ est un polynôme d'interpolation de Lagrange : $L_\ell(\lambda_i) = 1$ si $i = \ell$ et 0 sinon.

La propriété montrée au 1 s'écrit donc $\boxed{L_\ell(f) = \sum_{i=0}^{m} L_\ell(\lambda_i)p_i = p_\ell}$. D'après 2),

$$(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ L_\ell(f) = (f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda_j}(f - \lambda_j \,\mathrm{id}\,) = \alpha \left[(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} (f - \lambda_j \,\mathrm{id}\,)\right] = 0$$

Ainsi, d'après ci-dessus, $(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ p_\ell = 0$. En particulier, pour tout $x \in E$, $(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,)(p_\ell(x)) = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{Im}\,(p_\ell) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell id)}$.

Le polynôme de la question 2) annule f, donc les valeurs propres sont parmi ses racines.

Réciproquement, pour tout $\ell \in \{1, \dots, \ell\}$, $p_\ell \neq 0$ par hypothèse, donc $\mathrm{Im}\ p_\ell \neq \{0\}$, et $E_{\lambda_\ell} = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \neq \{0\}$ puisqu'on vient de montrer qu'il contient $\mathrm{Im}\ p_\ell$. Donc λ_ℓ est valeur propre.

Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont exactement } \lambda_1, \dots, \lambda_m.}$

Partie 4

1) Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$ (existe forcément car $f^{p-1} \neq 0$).

Montrons que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i f^i(x) = 0$$

Supposons les α_i non tous nuls, et notons i_0 le plus petit indice i tel que $\alpha_i \neq 0$. Alors la somme commence à i_0 et

$$0 = f^{p-i_0-1}(0) = f^{p-i_0-1}\left(\sum_{i=i_0}^{p-1} \alpha_i f^i(x)\right) = \sum_{i=i_0}^{p-1} \alpha_i f^{p+(i-i_0-1}(x) = \alpha_{i_0} f^{p-1}(x)$$

Ce qui est absurde puisque $\alpha_{i_0} \neq 0$ et $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{Il existe } x \in E \text{ non nul tel que la famille } (x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)) \text{ soit libre.}}$

(Ce type de preuve a été vue en exercice)

La famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre dans l'espace vectoriel E de dimension n, elle contient donc au plus n éléments : $\boxed{p \leqslant n.}$

Puisque $p \leqslant n$, $n - p \geqslant 0$ et donc $f^n = f^{n-p} \circ f^p = f^{n-p} \circ 0 = 0$.

2) Soit $h \in \mathscr{R}(f)$. Comme $f^p = 0$, $h^{2p} = (h^2)^p = f^p = 0$, donc $\boxed{h \text{ est nilpotent.}}$

Supposons $\mathscr{R}(f) \neq \emptyset$. Soit $h \in \mathscr{R}(f)$. Par définition de f, $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$ et $h^{2p} = 0$, donc h est nilpotent d'ordre au moins $2p - 1$. Donc, d'après 1), $\boxed{2p - 1 \leqslant n}$.

3) On effectue le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2}$ au voisinage de 0.

$$\forall k \geqslant 0 \qquad a_k = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!}$$

4) Par définition du $o_0(x^n)$, il existe une fonction ε_1 tendant vers 0 en 0 telle que

$$\sqrt{1 + x} = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x)$$

En élevant au carré il vient $1+x = P_n^2(x) + x^n\varepsilon_1(x)(2P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x))$. Posons

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)(2P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x))$$

Donc $P_n^2(x) - x - 1 = x^n\varepsilon(x)$, et par définition de ε_1, $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Si X^n ne divise pas $P_n^2(X) - X - 1$, alors $R(X) = \dfrac{P_n^2(X) - X - 1}{X^n}$ s'écrit de façon irréductible $R(X) = \dfrac{Q_1}{X^q}$ avec $q > 0$. Comme c'est une écriture irréductible, $Q_1(0) \neq 0$, donc les limites de $x \mapsto R(x)$ en 0^+ et 0^- ne sont pas finies.

Or on vient de montrer que $R(x) = \dfrac{P_n^2(x) - x - 1}{x^n} = \varepsilon(x)$ qui tends vers 0 en 0, ce qui est contradictoire. Donc $\boxed{X^n \text{ divise } P_n^2(X) - X - 1}$

5) *Encore une situation où l'on ne voit pas forcément où l'on va, mais il ne faut pas pour autant baisser les bras : inspirons-nous de la formule (valable sur $\mathbb{R}$) du 3.*

Posons $h = P_n(f)$. Alors, d'après 4, $h^2 - f - \mathrm{id} = P_n^2(f) - f - \mathrm{id} = f^nQ(f)$. Or d'après 1, $f^n = 0$, donc $h^2 - f - \mathrm{id} = 0$. Ainsi $\boxed{\mathscr{R}(f + \mathrm{id}) \neq \emptyset}$.

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si f est nilpotente, alors αf l'est aussi, donc le résultat précédent reste vrai : $\boxed{\mathscr{R}(\alpha f + \mathrm{id}) \neq \emptyset}$.

Pour tout β réel strictement positif, $\mathscr{R}\left(\dfrac{1}{\beta}f + \mathrm{id}\right) \neq \emptyset$ d'après ci-dessus. Soit $h \in \mathscr{R}\left(\dfrac{1}{\beta}f + \mathrm{id}\right)$, alors

$$(\sqrt{\beta}h)^2 = \beta h^2 = \beta\left(\frac{1}{\beta}f + \mathrm{id}\right) = f + \beta\,\mathrm{id}$$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{R}(f + \beta\,\mathrm{id}) \neq \emptyset.}$

FIN DE L'ÉPREUVE