

Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On note A une matrice carrée d'ordre $n > 0$ à coefficients complexes, I_n est la matrice identité carrée d'ordre $n > 0$ ayant des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs.
Le noyau et l'image d'une matrice désignent respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à cette matrice.
On considère la matrice M_A carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs de la façon suivante :

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Soit φ l'application qui à tout vecteur X de $\mathbb{C}^n$ associe le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^{2n}$.

- **a)** Montrer que φ est une application linéaire.
- **b)** Montrer que $\varphi_{|\,\mathrm{Ker}\,A}$, restriction de φ à Ker A, est bijective du noyau de la matrice A vers le noyau de la matrice M_A. Quelle relation en déduit-on entre les dimensions de $\mathrm{Ker}\,(M_A)$ et de $\mathrm{Ker}\,(A)$?
- **c)** En déduire le rang de la matrice M_A en fonction du rang de la matrice A. Citer le théorème utilisé.

2) On suppose, dans cette question, que la matrice A est diagonalisable et inversible.

- **a)** Exprimer la matrice M_A^2 en fonction de A.
- **b)** Démontrer que la matrice M_A^2 est diagonalisable.
- **c)** Montrer que la matrice M_A^2 est inversible.
- **d)** Ceci n'est pas une question : on admet que les questions précédentes nous permettent de prouver que M_A est diagonalisable (via un résultat hors programme).

3) On suppose, dans cette question, que la matrice M_A est diagonalisable.

- **a)** Démontrer que $\mathrm{Im}\,(M_A) = \mathrm{Im}\,(M_A^2)$. Indication : *se placer dans une base de vecteurs propres pour M_A.*
- **b)** En déduire $\mathrm{Ker}\,(M_A) = \mathrm{Ker}\,(M_A^2)$.
- **c)** Montrer que la matrice A est inversible. Indication : *pour $X \in \mathrm{Ker}\,A$, on pourra considérer le vecteur* $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$.
- **d)** On admet que si $u : E \to E$ est diagonalisable et laisse stable le sous-espace vectoriel F, alors $\widetilde{u} : F \to F$ sa restriction est aussi diagonalisable.
  Démontrer que la matrice A est diagonalisable.

4) Que peut-on déduire des questions 2) (en admettant la conclusion du d)) et 3) ?

Exercice 2

Notations et objectifs :

Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathscr{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs. On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f, $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f.

On notera $\mathscr{R}(f) = \{h \in \mathscr{L}(E) \mid h^2 = f\}$.

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathscr{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. I_p est la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème[1] est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathscr{R}(f)$.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie 1

1) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **a)** Montrer que f est diagonalisable.
- **b)** Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
- **c)** Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.
- **d)** Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
- **e)** Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée en 1b.
- **f)** Montrer que si $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
- **g)** Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

2) Soit f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **a)** Calculer par récurrence J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

1. Le problème n'est pas complet, en particulier la partie 3 est tronquée.

b) En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

c) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

d) **i)** À l'aide de la question 2b, trouver des endomorphismes p et q tels que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad f^m = \lambda^m p + \mu^m q \tag{1}$$

ii) Montrer que ce couple (p, q) est unique : $\exists!(p, q) \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifiant (1).

iii) Montrer que (p, q) forme une famille libre.

e) **i)** Calculer p^2 et q^2. Quelle est la nature des endomorphismes p et q ? Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

ii) Trouver tous les endomorphismes $h = \alpha p + \beta q$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, qui vérifient $h^2 = f$.

f) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice D de f, puis les matrices de p et de q, dans cette nouvelle base.

g) Déterminer une matrice K de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

h) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

Partie 2

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que

$$\lambda \neq \mu \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{id} & = & p + q \\ f & = & \lambda p + \mu q \\ f^2 & = & \lambda^2 p + \mu^2 q \end{array}$$

1) En exprimant f^2, f et id à l'aide de p et q, calculer $(f - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}\,)$. En déduire que λ et μ sont les seules valeurs propres possibles de f.

2) Exprimer $f - \lambda\,\mathrm{id}$ et $f - \mu\,\mathrm{id}$ à l'aide de p et q.

3) En déduire que $p \circ q = q \circ p = 0$, puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ q = \mathrm{Im}\ p$.

4) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ q$. En déduire, à l'aide 2, que f est diagonalisable. Donner la matrice de p dans une base de vecteurs propres de f (on pourra s'aider de la matrice de f dans cette base).

5) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$. Montrer que f est un isomorphisme, et écrire f^{-1} combinaison linéaire de p et q (on pourra s'aider dans sa recherche des matrices de de la question précédente).

6) Montrer par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

7) Soit $F = \mathrm{Vect}\,(p, q)$. Déterminer la dimension de F.

8) On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathscr{R}(f) \cap F$, c'est-à-dire l'ensemble des h tels que $h = \alpha p + \beta q$ et $h^2 = f$.

9) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Trouver une matrice K de $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.

10) Montrer que, si la multiplicité de la valeur propre λ est supérieure ou égale à 2, alors $\dim \mathrm{Im}\ p \geqslant 2$, puis, à l'aide de la question précédente et de la question 4, qu'il existe un endomorphisme $p' \in \mathscr{L}(E)$, $p' \notin F$, tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

11) En déduire que, si $\dim E \geqslant 3$, alors $\mathscr{R}(f) \not\subset F$

Partie 3 (incomplète)

Soit $p_1, \ldots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, m nombres réels deux à deux distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$$

1) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$

2) En déduire que $\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i \,\mathrm{id}\,) = 0$.

3) Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on considère le polynôme

$$L_\ell = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_\ell - \lambda_j}$$

Montrer que pour tout entier ℓ, tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\mathrm{Im}\,(p_\ell) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell id)$, puis que les valeurs propres de f sont exactement $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Partie 4

Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre (on pourra effectuer un raisonnement par l'absurde). En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.

2) Montrer que les $h \in \mathscr{R}(f)$ sont nilpotent. En déduire que, si $\mathscr{R}(f) \neq \emptyset$, alors $2p - 1 \leqslant n$.

3) Déterminer les réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ au voisinage de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

4) Montrer qu'il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \varepsilon(x)$. À l'aide des pôles de la fraction rationnelle $\dfrac{P_n^2(X) - X - 1}{X^n}$, en déduire que X^n divise $P_n^2(X) - X - 1$ (c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n^2(X) - X - 1 = X^n Q(X)$).

5) Montrer alors que $\mathscr{R}(f + \mathrm{id}\,) \neq \emptyset$. Plus généralement, montrer que pour tout α réel, $\mathscr{R}(\alpha f + \mathrm{id}\,) \neq \emptyset$, puis que pour tout β réel strictement positif, $\mathscr{R}(f + \beta\,\mathrm{id}\,) \neq \emptyset$.

FIN DE L'ÉPREUVE