Épreuve de Mathématiques 4

Correction

Exercice 1 (G2E 2012)

Pour tout cet exercice, revoir l'exercice d'algèbre linéaire intitulé « interpolation de Lagrange ».

1) $P_{i,k}(j) = 0$ signifie que j est racine de $P_{i,k}$, donc que $P_{i,k} = (X - j)Q$.
Ainsi, pour $k = 2$ et $i = 0$, on a $P_{0,2}(1) = 0$ et $P_{0,2}(2) = 0$ donc $P_{0,2} = \lambda(X - 1)(X - 2)$.
De plus $P_{0,2}(0) = 1$, donc $\lambda(-1)(-2) = 1$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$. En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{lcccc} P_{0,2} & = & \frac{1}{2}(X-1)(X-2) & = & 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2 \\ P_{1,2} & = & -X(X-2) & = & 2X - X^2 \\ P_{2,2} & = & \frac{1}{2}X(X-1) & = & -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 \end{array}}$$

Soit $(\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant 2} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{2} \alpha_i P_{i,2} = 0$.
En évaluant en $X = 0$, 1 et 2 on trouve respectivement $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$. Donc $(P_{i,2})_i$ est libre.
De plus $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \mathrm{Card}\left(\{P_{i,2}\}_{0\leqslant i\leqslant 2}\right)$ donc $\boxed{\text{ces polynômes forment une base de } \mathbb{R}_2[X]}$

2) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de coordonnées $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ dans la base B' : $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} \alpha_i P_{i,2}$.
Comme ci-dessus, en évaluant en $X = i$ on trouve $\alpha_i = P(i)$.
Ainsi, $\boxed{P \text{ a pour coordonnées } (P(0), P(1), P(2)) \text{ dans la base } B'.}$

3) D'après 1), $\boxed{M_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

Si on veut éviter d'inverser la matrice, il faut réussir à décomposer les éléments de la base B (donc 1, X et X^2) dans la base B', sans calculs. Or d'après 2), $P = P(0)P_{0,2} + P(1)P_{1,2} + P(2)P_{2,2}$: il suffit d'évaluer en $X = i$ pour avoir les coordonnées cherchées.

$$\boxed{M_{B,B'}^{-1} = M_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

On pensera à vérifier rapidement ses calculs en effectuant le produit $M_{B,B'}M_{B,B'}^{-1}$.

4) En évaluant en $X = 0$, 1 et 2, il vient le système *(d'inconnues $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$, que vous pouvez appeler x, y et z si vous préférez)*

$$\begin{array}{lcl} P(0) & = & P(0) \\ P(1) & = & P(0) + P(1) + P(2) \\ P(2) & = & P(0) + 2P(1) + 4P(2) \end{array}$$

Qui a pour solution $(P(0), P(1), P(2)) \in \text{Vect}\,((1,1,-1))$. Finalement,

$$\boxed{P = \lambda(1 + X - X^2)}$$

5) $P_{0,0}$ est de degré 0 donc constant, valant 1 en 0, donc égal à 1.
Pour $P_{1,1}$ on procède comme au 1), et $P_{2,2}$ a déjà été calculé au 1).

$$\boxed{P_{0,0} = 1 \quad \text{et} \quad P_{1,1} = X \quad \text{et} \quad P_{2,2} = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2}$$

Cette famille est de degrés échelonnés, donc libre. Montrons le.

Soit $(\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant 2} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\sum_{i=0}^{2} \alpha_i P_{i,i} = 0$. En développant il vient

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i P_{i,i} = \alpha_0 + (\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2)X + \frac{1}{2}\alpha_2 X^2 = 0$$

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_0 & = & 0 \end{array}\right.$.

Donc, en partant du haut, $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$. Ainsi $(P_{i,i})_{0\leqslant i\leqslant 2}$ est libre.

De plus $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \text{Card}\,(\{P_{i,2}\}_{0\leqslant i\leqslant 2})$ donc $\boxed{\text{ces polynômes forment une base de } \mathbb{R}_2[X]}$

6) Comme en 3), on lit les expressions obtenues en 5) : $\boxed{M_{B,B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

7) On peut calculer directement la matrice de passage, en décomposant les vecteurs de la base B'' dans la base B' comme au 3), en évaluant en $X = i$.
On peut aussi faire le produit matriciel : $M_{B',B''} = M_{B',B} M_{B,B''}$.

Quelle que soit la méthode choisie, on trouve $\boxed{M_{B',B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

Exercice 2 (ECE – HEC, 2012)

1) Ker f :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \text{Ker } f \iff M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\iff \left\{\begin{array}{r} y/m + z/m^2 = 0 \\ mx + z/m = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} my + z = 0 \\ m^2x + z = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{r} my + z = 0 \\ m^2x + z = 0 \\ -2z = 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2 \\
&\iff x = y = z = 0
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Ker } f = \{0\}}$

Im f : Ainsi, f est injective. Or f est un endomorphisme en dimension finie, donc f est bijective, et en particulier surjectif : $\boxed{\text{Im } f = \mathbb{R}^3}$

Comme f est bijectif, $\boxed{\text{la matrice } M \text{ est inversible}}$

2) $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = 2I + M$. Ainsi, $M^2 - M = 2I$ puis $M\Big(\dfrac{1}{2}(M-I)\Big) = \Big(\dfrac{1}{2}(M-I)\Big)M = I$.

Donc, par définition de l'inverse M^{-1} de M, $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{2}(M-I)}$

3) a) $\boxed{\mathrm{Mat}\,(p) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 1 & 1/m \\ m^2 & m & 1 \end{pmatrix}}$

Après calculs, $(\mathrm{Mat}\,(p))^2 = 0$ donc $p^2 = 0$: $\boxed{p \text{ est un projecteur}}$

<u>Ker p</u> :

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, p \iff \mathrm{Mat}\,(p)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} m^2x + my + z = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases} \iff (x,y,z) \in \mathrm{Vect}\,((0,1,-m),(1,-m$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Vect}\,((0,1,-m),(1,-m,0))}$

<u>Im p</u> : D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}\, p = \dim \mathrm{Im}\, p = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}\, p = 3 - 2 = 1$.

$$\mathrm{Im\ Mat}\,(p) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/m \\ 1 \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/m^2 \\ 1/m \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}\right)$$

Ce qui est cohérent avec le résultat trouvé par le théorème du rang. *(Après avoir calculé la dimension de* Im p*, il suffisait de prendre un vecteur colonne non nul de* Mat (p) *pour avoir une base de* Im p*.)*

b) De même, on trouve $\boxed{\mathrm{Mat}\,(q) = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & -2 & 1/m \\ m^2 & m & -2 \end{pmatrix}}$ puis, $(\mathrm{Mat}\,(q))^2 = 0$ donc $q^2 = 0$:

$\boxed{q \text{ est un projecteur}}$

On peut remarquer que $p + q = \mathrm{id}$ donc $q = \mathrm{id} - p$: q est le projecteur sur Ker p parallèlement à Im p.

c) Par un calcul matriciel, $\boxed{p \circ q = 0}$ et $\boxed{q \circ p = 0}$.

Pour $n = 0$, $\boxed{p^0 = q^0 = \mathrm{id}}$ par définition.

Pour $n \geqslant 1$, $\boxed{p^n = p}$ par récurrence ($p^{n+1} = p^n \circ p = p \circ p = p$), et de même $\boxed{q^n = q}$.

d) *Ici, on a une sorte de système linéaire* (2×2) *à inverser. On pouvait aussi partir de* $\mathrm{id} = p + q$ *de la définition de* p *ou* q*.*

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{3}(f + \mathrm{id}) \\ q = -\dfrac{1}{3}(f - 2\,\mathrm{id}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f + \mathrm{id} = 3p \\ f - 2\,\mathrm{id} = -3q \end{cases} \Longrightarrow 3f = 6p - 3q \Longrightarrow f = 2p - q$$

Comme $pq = qp$ $(= 0)$, on peut appliquer la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^n = (2p - q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} p^k q^{n-k}$$

Or, dès que $k \neq 0$ et $n - k \neq 0$, un produit pq nul apparaît donc $2^k(-1)^{n-k}p^kq^{n-k} = 0$.

Ainsi il reste :

$$\boxed{f^0 = \mathrm{id}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^n = 2^n p + (-1)^n q}$$

e) En exprimant p et q en fonction de f et id, la formule précédente nous donne

$$f^n = 2^n p + (-1)^n q = \frac{2^n}{3} f + \frac{2^n}{3}\,\mathrm{id} - \frac{(-1)^n}{3} f + \frac{2(-1)^n}{3}\,\mathrm{id} = \frac{2^n - (-1)^n}{3} f + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}\,\mathrm{id}$$

Matriciellement, cette égalité s'écrit $\boxed{M^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} M + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I}$

Donc $a_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$.

f) D'après 2), $f = \dfrac{1}{2}(f - \mathrm{id}) = \dfrac{(}{2}p - q - (p+q)) = \dfrac{1}{2}(p - 2q) = 2^{-1}p - q$.

Donc par des calculs identiques à ceux de la question d), en remplaçant 2 par 1/2, on montre que la formule précédente reste valable si $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le chapitre « Réduction », on verra que f aurait eu une matrice diagonale dans une base bien choisie, donc pour $n \in \mathbb{Z}$ calculer f^n revient à mettre à la puissance n les coefficients de la diagonale.

Exercice 3 (ECT – ESCP, 2012)

1) I et J appartiennent à $\mathscr{E}$, $s(I) = 1$ et $s(J) = 3$. *(Contrairement à ce que j'ai fait, vous devez détailler, au moins le calcul pour la première matrice.)*

2) $K \in \mathscr{E}$ équivaut aux 5 équations suivantes :

$$1 + a + b = -2 + 5 + 3 = a - 6 + 5 = 1 - 2 + a = a + 5 - 6 = b + 3 + 5$$

Donc $6 = a - 1$ puis $a = 7$ et $1 + a + b = 6$ entraîne $b = -2$.
De plus, ces valeurs vérifient toutes les égalités.

$$\boxed{a = 7} \qquad \text{et} \qquad \boxed{b = -2}$$

3) a) Soit M, $M' \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + M' \in \mathscr{E}$.

$$\begin{aligned}
\lambda a_1 + a_1' + \lambda a_2 + a_2' + \lambda a_3 + a_3' &= \lambda(a_1 + a_2 + a_3) + a_1' + a_2' + a_3' \\
&= \lambda(b_1 + b_2 + b_3) + b_1' + b_2' + b_3' \\
&= \lambda b_1 + b_1' + \lambda b_2 + b_2' + \lambda b_3 + b_3'
\end{aligned}$$

Donc les deux premières lignes de $\lambda M + M'$ ont la même somme.
Les autres lignes et les colonnes se traitent de façon analogue. Donc $\lambda M + M' \in \mathscr{E}$.
De plus $0 \in \mathscr{E}$ donc $\mathscr{E} \neq \emptyset$.
En conclusion, $\boxed{\mathscr{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$

b) Soit M, $M' \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
s(\lambda M + M') &= \lambda a_1 + a_1' + \lambda a_2 + a_2' + \lambda a_3 + a_3' \qquad \text{(par exemple)} \\
&= \lambda(a_1 + a_2 + a_3) + a_1' + a_2' + a_3' \\
&= \lambda s(M) + s(M')
\end{aligned}$$

De plus $s(M) \in \mathbb{R}$. Par conséquent $\boxed{s \text{ est une application linéaire de } \mathscr{E} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

4) a) $\boxed{\Longrightarrow}$: Supposons $A \in \mathscr{E}$.

$$AJ = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 & b_1 + b_2 + b_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix} = s(A)J$$

$$JA = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 & a_3 + b_3 + c_3 \\ a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 & a_3 + b_3 + c_3 \\ a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 & a_3 + b_3 + c_3 \end{pmatrix} = s(A)J$$

Donc $AJ = JA = s(A)J$.
$\boxed{\Longleftarrow}$: Réciproquement, supposons $AJ = JA$.
Alors, en regardant les premières colonnes de AJ et JA, il vient

$$a_1 + b_1 + c_1 = a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3$$

Les autres colonnes donnent, de même, les égalités voulues. Donc $A \in \mathscr{E}$.
Finalement, $\boxed{A \in \mathscr{E} \Longleftrightarrow AJ = JA}$.

b) Lors des calculs de la question précédente, on a montré que $\boxed{A \in \mathscr{E} \Longrightarrow AJ = s(A)J}$.

5) a) Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Alors $AB = (c_{ij})$ où $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$.

Il faut montrer que les $\left(\displaystyle\sum_{\ell=1}^{3} c_{i\ell}\right)_i$ et $\left(\displaystyle\sum_{\ell=1}^{3} c_{\ell j}\right)_j$ sont tous égaux. Pour tout $i \in \{1, \dots, 3\}$.

$$\sum_{\ell=1}^{3} c_{i\ell} = \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{k\ell} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\Big(\sum_{\ell=1}^{3} b_{k\ell}\Big) = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}(s(B)) = s(A)s(B)$$

Le calcul est identique sur les lignes. Ainsi, les sommes des colonnes et des lignes de AB sont égales et valent $s(A)s(B)$:

$$\boxed{AB \in \mathscr{E}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{s(AB) = s(A)s(B)}$$

(Comme vous le voyez, avec des notations du type (a_{ij}) – au lieu des a_1, b_1, etc... de l'énoncé – la rédaction peut être beaucoup plus efficace et concise. Le principe du « de même » reste le même.)

Méthode 2 : En utilisant 4a), $ABJ = A(BJ) = A(JB) = (AJ)B = JAB$ donc $AB \in \mathscr{E}$.
Et 4)b) : $ABJ = s(AB)J$ et $ABJ = A(BJ) = s(B)AJ = s(A)s(B)J$, donc $s(AB) = s(A)s(B)$.
Plus élégant.

b) $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ d'après 3)a) et stable par produit d'après 5)a), c'est donc une sous-algèbre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En conclusion, $\boxed{(\mathscr{E}, +, \times, .) \text{ est une algèbre.}}$

D'après 3)b) et 5)b), $\boxed{s \text{ est un morphisme d'algèbre.}}$

6) a) $A \in \mathscr{E} \Longrightarrow AJ = JA \Longrightarrow J = A^{-1}JA \Longrightarrow JA^{-1} = A^{-1}J \Longrightarrow \boxed{A^{-1} \in \mathscr{E}}$

b) Par définition de A^{-1}, $AA^{-1} = I$.
De plus, s est un morphisme d'algèbre, donc $s(AA^{-1}) = s(A)s(A^{-1}) = s(I) = 1$. Par conséquent,

$$\boxed{s(A) \neq 0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{s(A^{-1}) = \frac{1}{s(A)}}$$

7) a) $\mathscr{F} = \mathrm{Ker}\,(s)$, et s est un morphisme d'algèbre, donc $\boxed{\mathscr{F} \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$

b) $J \in \mathscr{E}$ d'après 1), et $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel donc $\boxed{B \in \mathscr{E}}$
Après calculs (ou d'après 4)b)...), $J^2 = s(J)J = 3J$. Donc, en utilisant 4)b),

$$BC = B(A - B) = \frac{1}{3}s(A)\big(JA - \frac{1}{3}s(A)J^2\big) = \frac{1}{3}s(A)\big(s(A)J - s(A)J\big) = 0$$

De plus, A et J commutent (4)a)) donc $\boxed{CB = BC = 0}$.

c) D'après 4), $AJ = s(A)J = JA$ donc, en multipliant par $\dfrac{1}{3}s(A)$, $AB = s(A)B = BA$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^nB = (s(A))^nB$ (par récurrence).
Comme $s(B) = s(A)$, $BJ = s(A) = JB$ puis de même $B^{n+1} = (s(A))^nB$.
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad (A - B)^n = A^n - B^n$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est tautologique.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie ($n \geqslant 1$).

$$\begin{aligned}(A-B)^{n+1} &= (A^n - B^n)(A-B) = A^{n+1} - B^n A - A^n B + B^{n+1} \\ &= A^{n+1} - s(A)^{n-1} BA - s(A)^n B + s(A)^n B \\ &= A^{n+1} - s(A)^n B = A^{n+1} - B^{n+1}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad (A-B)^n = A^n - B^n}$

d) Comme $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel et que B et $A \in \mathscr{E}$, $C \in \mathscr{E}$.
De plus $s(B) = \dfrac{1}{3} s(A)s(J) = s(A)$, $s(C) = s(A-B) = s(A) - s(B) = 0$.
Donc $\boxed{\text{La matrice } C \text{ appartient à } \mathscr{F}.}$

e) On vient de montrer que, pour tout $A \in \mathscr{E}$, $A = B + C$ avec $B \in \mathrm{Vect}\,(J)$ et $C \in \mathscr{F}$ (d)).
C'est-à-dire $\mathscr{E} = \mathrm{Vect}\,(J) + \mathscr{F}$ (puisque $\mathrm{Vect}\,(J)$ et $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$).
(La question à se poser est : a-t-on des informations sur la dimension ? A priori, non, donc il faut y aller à la main...)
Soit $A \in \mathrm{Vect}\,(J) \cap \mathscr{F}$. C'est-à-dire $A = \lambda J$ et $s(A) = s(\lambda J) = 3\lambda = 0$. Donc $\lambda = 0$, et $A = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Vect}\,(J) \cap \mathscr{F} = \{0\}$.
En résumé, $\mathrm{Vect}\,(J) \cap \mathscr{F} = \{0\}$ et $\mathscr{E} = \mathrm{Vect}\,(J) + \mathscr{F}$ donc

$$\boxed{\mathscr{E} = \mathrm{Vect}\,(J) \oplus \mathscr{F}}$$

8) **a)** $F_S = \mathscr{F} \cap S_3(\mathbb{R})$ et $F_A = \mathscr{F} \cap A_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels comme intersection de sous-espaces vectoriels.
Si $A \in \mathscr{F}$, ${}^tA \in \mathscr{F}$. Notons $\sigma : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ l'application transposition restreinte à $\mathscr{F}$: $\sigma(A) = {}^tA$.
Alors σ est une symétrie de l'espace vectoriel $\mathscr{F}$, qui vérifie donc

$$\mathscr{F} = \mathrm{Ker}\,(\sigma - \mathrm{id}_{\mathscr{F}}) \oplus \mathrm{Ker}\,(\sigma + \mathrm{id}_{\mathscr{F}}) = F_S \oplus F_A$$

Car $\mathrm{Ker}\,(\sigma - \mathrm{id}_{\mathscr{F}}) = F_S$ et $\mathrm{Ker}\,(\sigma + \mathrm{id}_{\mathscr{F}}) = F_A$.

b) - $\boxed{F_S}$ Soit $A = (a_{ij}) \in F_S$, avec $a_{ij} = a_{ji}$. De plus $s(A) = 0$ donc $a_{11} = -a_{12} - a_{13}$, $a_{22} = -a_{12} - a_{23}$ et $a_{33} = -a_{13} - a_{23}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} -a_{12}-a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & -a_{12}-a_{23} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{13}-a_{23}\end{pmatrix} \\ &= a_{12}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $\dim F_S = 3$ (au passage, on a trouvé une base de F_S)
- $\boxed{F_S}$ De même,

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{12} \\ -a_{12} & 0 & a_{12} \\ a_{12} & -a_{12} & 0\end{pmatrix} \\ &= a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $\dim F_A = 1$.

- $\boxed{F_S}$ $\dim \operatorname{Vect}(J) = 1$.

  Or $\mathscr{F} = F_S \oplus F_A$ d'après a) donc $\dim \mathscr{F} = 3+1 = 4$, puis $\mathscr{E} = \operatorname{Vect}(J) \oplus \mathscr{F}$ donc $\boxed{\dim \mathscr{E} = 1+4 = 5}$

Exercice 4 (PT A 2011)

1) Une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ soit inversible est que $\boxed{\det A \neq 0}$.

Comme $(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$, $\boxed{\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}}$

2) On sait que si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible, son inverse est égale à :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\widetilde{A}$$

où $\widetilde{A}$ désigne la matrice des cofacteurs de A.

Dans le cas 2×2, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, cette formule s'écrit : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

On applique cette formule aux trois cas proposés. On trouve :

$$\boxed{A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ;\ A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} ;\ A_3^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

On pouvait aussi faire 3 pivots.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$;

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. Par conséquent, $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ sont deux entiers. Or $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$, donc est un entier qui peut s'écrire comme l'inverse d'un entier. : les seules valeurs possibles sont $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Donc A est inversible en tant que matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et en inversant A on trouve $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}$.

Or $\det(A) \in \{-1, 1\}$ donc $\dfrac{1}{det(A)}$ est entier, par conséquent $A^{-1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$.

Conclusion : $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ si et seulement si } \det(A) \in \mathbb{Z}^\times.}$

4) Soit $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$. tels que $\det(A_4) = 5 - bc = 1$. C'est-à-dire tels que $bc = 4$. Les seules possibilités sont donc

$$\boxed{\{(1,4), (2,2), (4,1), (-1,-4), (-2,-2), (-4,-1)\}}$$

5) Soit A et $B \in SL_2(\mathbb{Z})$. Comme le déterminant est un morphisme de groupe (pour le produit matriciel), $\det(AB^{-1}) = 1$, et d'après 3) $B^{-1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ donc $AB^{-1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. Ainsi, $AB^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

De plus $I_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$ donc $SL_2(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$. Ainsi, $SL_2(\mathbb{Z})$ muni du produit matriciel est un groupe comme sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

Autre méthode : $\det : GL_2(\mathbb{Z}) \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes ($\{-1, 1\}$ muni du produit), donc son noyau (qui est $SL_2(\mathbb{Z})$) est un groupe.