Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (G2E 2012)

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 muni de sa base canonique $B = \{1, X, X^2\}$.

Pour tout entier k appartenant à $[\![0,2]\!]$ et tout entier i appartenant à $[\![0,k]\!]$, on note $P_{i,k}$ le polynôme de degré k défini par :

$$\forall j \in [\![0,k]\!] - \{i\},\ P_{i,k}(j) = 0 \quad \text{et} \quad P_{i,k}(i) = 1.$$

$P_{i,k}$ est donc le polynôme de degré k qui vaut 1 en i et qui s'annule pour les autres valeurs entières comprises entre 0 et k.

1) Déterminer $(P_{i,2})_{0\leqslant i\leqslant 2}$. Montrer que ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ que nous noterons B'.

2) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées de P dans la base B'.

3) Déterminer $M_{B,B'}$, matrice de passage de la base B à la base B' et sans calcul explicite, déterminer l'inverse de $M_{B,B'}$.

4) Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :

$$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$$

5) Déterminer $(P_{i,i})_{0\leqslant i\leqslant 2}$. Montrer que ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ que nous noterons B''.

6) Déterminer $M_{B,B''}$ matrice de passage de la base B à la base B''.

7) Déterminer, de deux façons différentes, $M_{B',B''}$ matrice de passage de la base B' à la base B''.

Exercice 2 (ECE – HEC, 2012)

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. La matrice M est-elle inversible ?

2) Montrer que M^2 est une combinaison linéaire de I et M. En déduire l'inverse de M.

3) On pose $p = \dfrac{1}{3}(f + \mathrm{id})$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2\,\mathrm{id})$.

a) Donner la matrice de p dans la base canonique. Déterminer $p \circ p$ et en déduire la nature de l'endomorphisme p. Déterminer $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$.

b) Déterminer la nature de l'endomorphisme q.

c) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p^n et q^n.

d) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de f^n en fonction de p et q.

e) Déterminer (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $M^n = a_n I + b_n M$.

f) La formule précédente reste-t-elle valable si $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 3 (ECT – ESCP, 2012)

On considère $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante : une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{E}$ si

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note alors $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que I et J appartiennent à $\mathscr{E}$ et donner les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.

2) Soit a et b deux réels et $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels a et b pour que $K \in \mathscr{E}$.

3) **a)** Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que s est une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

a) Montrer que $A \in \mathscr{E} \iff AJ = JA$.

b) Vérifier que $A \in \mathscr{E} \implies AJ = s(A)J$.

5) Soit A et B deux matrices de $\mathscr{E}$.

a) Montrer que $AB \in \mathscr{E}$, puis que $s(AB) = s(A)s(B)$.

b) En déduire que $\mathscr{E}$ est une algèbre et que s est un morphisme d'algèbre.

6) Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathscr{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.

a) À l'aide de la question 4a montrer que $A^{-1} \in \mathscr{E}$.

b) Montrer que $s(A) \neq 0$. Exprimer $s(A^{-1})$ en fonction de $s(A)$.

7) Soit $A \in \mathscr{E}$. On pose $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.

On note $\mathscr{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathscr{E}$ vérifiant $s(M) = 0$.

a) Montrer que $\mathscr{F}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $B \in \mathscr{E}$ et que $BC = CB = 0$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(A - B)^n = A^n - B^n$.

d) La matrice C appartient-elle à $\mathscr{F}$?

e) En déduire que $\mathscr{E} = \mathrm{Vect}\,(J) \oplus \mathscr{F}$.

8) Soit $S_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques (${}^tM = M$) et $A_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques (${}^tM = -M$).

a) Montrer que $F_S = \mathscr{F} \cap S_3(\mathbb{R})$ et $F_A = \mathscr{F} \cap A_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels, puis que $\mathscr{F} = F_S \oplus F_A$.

b) En déduire la dimension de $\mathscr{F}$ puis celle de $\mathscr{E}$.

Exercice 4 (PT 2011, partiel)

On désigne par n un entier naturel strictement supérieur à 1 et H l'un des ensemble de nombre $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{M}_n(H)$ l'anneau des matrices carrées de taille n, à coefficients dans H et on désigne par I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(H)$.

1) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur son déterminant une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Exprimer alors $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det(A)$.

2) Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} et que A^{-1} est, elle aussi, dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
Donner alors une expression que de A^{-1} en fonction de a, b, c et d.

On note désormais $SL_2(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ constitué des matrices de déterminant 1.

4) Déterminer les couples $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

5) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ muni du produit matriciel est un groupe.

FIN DE L'ÉPREUVE