Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (Concours national marocain 2010, partiel)

1) Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_f(x) &= \det(xI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ x-2 & x-2 & 1 \\ x-2 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\
& \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \qquad (L_i \leftarrow L_i - L_1) \\
&= (x-2)(x-1)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_f(x) = (x-2)(x-1)^2}$$

2) D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont

- $\lambda = 2$, de multiplicité 1 ;
- $\lambda = 1$, de multiplicité 2.

- $\underline{\lambda = 2}$: Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre 2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(2I_3 - A)X = 0 &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_2 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
&\iff x_2 = x_3 = x_1
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{E_2 = \text{Vect}\left((1,1,1)\right).}$

- $\underline{\lambda = 1}$: Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(I_3 - A)X = 0 &\iff \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \quad - 2x_2 \qquad = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\iff x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = x_1
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\,((1,0,1)).}$

Par conséquent $\dim E_1 = 1 < 2$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

3) Calculons : $$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dès lors, $x \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2 \iff (A - I_3)^2 X = 0 \iff \boxed{x_1 + x_2 - x_3 = 0}$. Et $\boxed{\dim \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2 = 2}$

4) Après calcul matriciel, $e_1 = (f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(e_2) = (-2, 0, -2) \in E_1$.

a) Puisque e_3 est un vecteur propre de f, $e_3 \in E_1 = \mathrm{Vect}\,((1,0,1))$ ou $e_3 \in E_2 = \mathrm{Vect}\,((1,1,1))$. Or la deuxième composante de e_3 est égale à 1, donc $e_3 \notin E_1$. Par conséquent $e_3 \in E_2$ et $\boxed{e_3 = (1,1,1)}$

Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\det(P) = -2 \neq 0$, $\boxed{\text{la famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ et P est la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base.

b) $e_1 \in E_1$ et $e_3 \in E_2$, donc $f(e_1) = e_1$ et $f(e_3) = 2e_3$. Donc B est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 2 \end{pmatrix}$$

Or $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $f(e_2) = e_1 + e_2$

(on peut se douter que la matrice cherchée est triangulaire, donc que seuls e_1 et e_2 interviennent, ce qui simplifie la recherche des coordonnées).

Conclusion : $$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A = PBP^{-1}}$$

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $B^0 = I_3$ est vrai.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$B^{n+1} = B^n B = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$

De plus, $A = PBP^{-1}$ donc $A^n = PB^nP^{-1}$.

[insérer ici un pivot de Gauss pour inverser P] $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Finalement, $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad A^n = \begin{pmatrix} -2 & -2n+1 & 2^n \\ 0 & -1 & 2^n \\ -2 & -2n & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n - 2n & 2^n - 1 & -2^n + 2n + 1 \\ 2^n - 1 & 2^n & -2^n + 1 \\ 2^n - 2n - 1 & 2^n - 1 & 2^n + 2n + 2 \end{pmatrix}}$

On vérifie rapidement le calcul de A^n en $n = 0$ et $n = 1$, on retrouve bien I_3 et A : c'est sans doute juste.

Exercice 2 (G2E 2012)

Pour tout cet exercice, revoir l'exercice d'algèbre linéaire intitulé « interpolation de Lagrange ».

1) $P_{i,k}(j) = 0$ signifie que j est racine de $P_{i,k}$, donc que $P_{i,k} = (X - j)Q$.
Ainsi, pour $k = 2$ et $i = 0$, on a $P_{0,2}(1) = 0$ et $P_{0,2}(2) = 0$ donc $P_{0,2} = \lambda(X-1)(X-2)$.
De plus $P_{0,2}(0) = 1$, donc $\lambda(-1)(-2) = 1$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$. En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{lclcl} P_{0,2} & = & \frac{1}{2}(X-1)(X-2) & = & 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2 \\ P_{1,2} & = & -X(X-2) & = & 2X - X^2 \\ P_{2,2} & = & \frac{1}{2}X(X-1) & = & -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 \end{array}}$$

Soit $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{2} \alpha_i P_{i,2} = 0$.
En évaluant en $X = 0$, 1 et 2 on trouve respectivement $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$. Donc $(P_{i,2})_i$ est libre.
De plus $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \mathrm{Card}\left(\{P_{i,2}\}_{0 \leqslant i \leqslant 2}\right)$ donc $\boxed{\text{ces polynômes forment une base de } \mathbb{R}_2[X]}$

2) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de coordonnées $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ dans la base B' : $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} \alpha_i P_{i,2}$.
Comme ci-dessus, en évaluant en $X = i$ on trouve $\alpha_i = P(i)$.
Ainsi, $\boxed{P \text{ a pour coordonnées } (P(0), P(1), P(2)) \text{ dans la base } B'.}$

3) D'après 1), $\boxed{M_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

Si on veut éviter d'inverser la matrice, il faut réussir à décomposer les éléments de la base B (donc 1, X et X^2) dans la base B', sans calculs. Or d'après 2), $P = P(0)P_{0,2} + P(1)P_{1,2} + P(2)P_{2,2}$: il suffit d'évaluer en $X = i$ pour avoir les coordonnées cherchées.

$$\boxed{M_{B,B'}^{-1} = M_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

On pensera à vérifier rapidement ses calculs en effectuant le produit $M_{B,B'}M_{B,B'}^{-1}$.

4) En évaluant en $X = 0$, 1 et 2, il vient le système *(d'inconnues $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$, que vous pouvez appeler x, y et z si vous préférez)*

$$\begin{array}{rcl} P(0) & = & P(0) \\ P(1) & = & P(0) + P(1) + P(2) \\ P(2) & = & P(0) + 2P(1) + 4P(2) \end{array}$$

Qui a pour solution $(P(0), P(1), P(2)) \in \mathrm{Vect}\,((1, 1, -1))$. Finalement,

$$\boxed{P = \lambda(1 + X - X^2)}$$

5) $P_{0,0}$ est de degré 0 donc constant, valant 1 en 0, donc égal à 1.
Pour $P_{1,1}$ on procède comme au 1), et $P_{2,2}$ a déjà été calculé au 1).

$$\boxed{P_{0,0} = 1 \quad \text{et} \quad P_{1,1} = X \quad \text{et} \quad P_{2,2} = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2}$$

Cette famille est de degrés échelonnés, donc libre. Montrons le.

Soit $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{2} \alpha_i P_{i,i} = 0$. En développant il vient

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i P_{i,i} = \alpha_0 + (\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2)X + \frac{1}{2}\alpha_2 X^2 = 0$$

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_0 & = & 0 \end{array}\right.$.

Donc, en partant du haut, $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$. Ainsi $(P_{i,i})_{0 \leqslant i \leqslant 2}$ est libre.

De plus $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \mathrm{Card}\,(\{P_{i,2}\}_{0 \leqslant i \leqslant 2})$ donc $\boxed{\text{ces polynômes forment une base de } \mathbb{R}_2[X]}$

6) Comme en 3), on lit les expressions obtenues en 5) : $\boxed{M_{B,B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

7) On peut calculer directement la matrice de passage, en décomposant les vecteurs de la base B'' dans la base B' comme au 3), en évaluant en $X = i$.
On peut aussi faire le produit matriciel : $M_{B',B''} = M_{B',B} M_{B,B''}$.

Quelle que soit la méthode choisie, on trouve $\boxed{M_{B',B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

Exercice 3 (Essec ECS 2011)

Partie 1 (Préliminaires)

1) Soit $0 \in \mathscr{L}(E)$, $\forall u \in U$, $u \circ 0 = 0 = 0 \circ u$. Ainsi $0 \in C(U)$, qui est donc non vide.
Soit $(v_1, v_2) \in C(U)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{llcll} \forall u \in U, & u \circ (\lambda v_1 + v_2) & = & \lambda u \circ v_1 + u \circ v_2 & (u \text{ est linéaire}) \\ & & = & \lambda v_1 \circ u + v_2 \circ u & (v_i \in C(U)) \\ & & = & (\lambda v_1 + v_2) \circ u & \end{array}$$

Donc $\lambda v_1 + v_2 \in C(U)$.

Conclusion : $\boxed{C(U) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E).}$

De plus $\mathrm{id}_E \in C(U)$, donc $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}_E) \subset C(U)$, puis $\dim\big(\mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}_E)\big) \leqslant \dim C(U)$.

Ainsi $\boxed{\dim C(U) \geqslant 1}$

2) Soit $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k \in \mathbb{R}[u]$.

$$u \circ P(u) = u \circ \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^{k+1} = \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big) \circ u = P(u) \circ u$$

Donc $P(u) \in C(u)$.
Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}[u] \subset C(u)}$

3) Soit $v \in C(u)$.

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda(u) &\implies u(x) = \lambda x \\ &\implies v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x) \\ &\implies v(u(x)) = \lambda v(x) && \text{(car } v \in C(u)) \\ &\implies v(x) \in E_\lambda(u) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)}$

4) Remarquons que $u \in C(u)$ (cas particulier de 2), ou calcul immédiat).
Soit $w \in C(C(u))$: $\forall v \in C(u)$, $v \circ w = w \circ v$. Pour $v = u$, on a donc $u \circ w = w \circ u$: $w \in C(u)$.
Conclusion : $\boxed{C(C(u)) \subset C(u)}$

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $v \in C(u)$, alors $u^k \circ v = v \circ u^k$. Soit $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k \in \mathbb{R}[u]$.

$$\forall v \in C(u), \quad v \circ P(u) = v \circ \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big) = \sum_{k=0}^{d} a_k (v \circ u^k) = \sum_{k=0}^{d} a_k (u^k \circ v) = \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big) \circ v = P(u) \circ v$$

Donc $P(u) \in C(C(u))$.
Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}[u] \subset C(C(u))}$

Partie 2 (Étude d'un exemple)

1) a) F est le noyau de l'endomorphisme $(a_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n)_{n\geqslant 0}$ de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Cette application est linéaire car le « shift » $(a_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (a_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est linéaire.
Ainsi $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

b) Soit $(a_n) = (a_0 q^n)$ une suite géometrique de raison $q \in \mathbb{R}$. On suppose $a_0 \neq 0$ et $q \neq 0$.
Comme F est un sous-espace vectoriel, on pouvait se contenter d'étudier (q^n) : si $(q^n) \in F$, alors $\lambda(q^n) \in F$.

$$(a_n) \in F \iff 2q^3 + 3q^2 - 1 = 0$$

Or le polynôme $2x^3 + 3x^2 - 1$ a pour racine évidente $x = -1$. Factorisons par $(x+1)$:

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = (2x^2 + x - 1)(x+1) = (2x-1)(x+1)^2$$

Les valeurs possibles de q sont donc -1 et $1/2$.
Conclusion : $\boxed{\text{Les suites géométriques de } F \text{ sont de raison } 0,\ 1/2 \text{ et } -1.}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2\gamma_{n+3}+3\gamma_{n+2}-\gamma_n = 2(n+3)(-1)^{n+3}+3(n+2)(-1)^{n+2}-n(-1)^n = (-1)^n\Big(-2(n+3)+3(n+2)-n\Big) = 0$$

Ainsi, $\boxed{(\gamma_n) \in F}$.

c) L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à un triplet (a_0, a_1, a_2) associe la suite récurrente (a_n) de premiers termes a_0, a_1, a_2 et définie par $a_{n+3} = -\dfrac{1}{2}(3a_{n+2} - a_n)$ est injective et d'image F.
Injectivité : si $(a_n) = \varphi((a_0, a_1, a_2)) = (0)$, alors en particulier $(a_0, a_1, a_2) = (0, 0, 0)$.
De plus, $\operatorname{Im} \varphi = F$ par construction.
Donc, par le théorème du rang, $\boxed{\dim F = \dim \mathbb{R}^3 = 3}$.
Montrons que la famille $\mathscr{B} = ((\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n))$ est libre : Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1(\alpha_n) + \lambda_2(\beta_n) + \lambda_3(\gamma_n) = 0$$

En $n = 0$, 1 et 2 cette égalité nous donne $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{2} - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{4} + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$

En résolvant ce système, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
(On pouvait aussi calculer le déterminant de la matrice sous-jacente, qui vaut $9/4 \neq 0$)
Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est libre.
Or $\dim F = 3 = \operatorname{Card} \mathscr{B}$, donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } F.}$

2) Soit u l'application définie pour $(a_n) \in F$ par $u((a_n)) = (b_n)$ avec $b_n = a_{n+1}$. (l'application u décale les termes de la suite vers la gauche).

a) Soit $(a_n) \in F$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0$, et en posant $n = p + 1$ il vient

$$2a_{p+1+3} + 3a_{p+1+2} - a_{p+1} = 0 = 2b_{p+3} + 3b_{p+2} - b_p$$

Donc $(b_n) = u((a_n)) \in F$.
L'application u est linéaire : $u(\lambda(a_n) + (a'_n)) = u((\lambda a_n + a'_n)) = (\lambda a_{n+1} + a'_{n+1}) = \lambda u((a_n)) + u((a'_n))$.
Conclusion : $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } F.}$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$. C'est le décalage de k termes vers la gauche.

c) Posons $\boxed{P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1}$. Alors, pour tout $(a_n) \in F$,

$$P(u)((a_n)) = (2u^3 + 3u^2 - \operatorname{id}_F)((a_n)) = (2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n) = (0)$$

(On note (0) la suite nulle, qui vaut 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$). Ainsi $P(u) = 0$.

d) Notons $u((a_n))_n$ le n-ième terme de la suite $u((a_n))$.

- $u((\alpha_n))_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n}$ donc $u((\alpha_n)) = \dfrac{1}{2}(\alpha_n)$.
- $u((\beta_n))_n = (-1)^{n+1} = -(-1)^n$ donc $u((\beta_n)) = -(\beta_n)$
- $u((\gamma_n))_n = (n+1)(-1)^{n+1} = -n(-1)^n - (-1)^n$ donc $u((\gamma_n)) = -(\gamma_n) - (\beta_n)$

En conclusion, $\begin{cases} u((\alpha_n)) = \dfrac{1}{2}(\alpha_n) \\ u((\beta_n)) = -(\beta_n) \\ u((\gamma_n)) = -(\beta_n) - (\gamma_n) \end{cases}$

Ainsi, matriciellement, $\boxed{T = \operatorname{Mat}(u, \mathscr{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u((\alpha_n)) & u((\beta_n)) & u((\gamma_n)) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (\alpha_n) \\ (\beta_n) \\ (\gamma_n) \end{array} \end{array}}$

Une récurrence (à faire) nous donne $\boxed{T^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Toujours ***vérifier*** *ses calculs : ici pour $k=0$ (on trouve $T^0 = I_3$: OK!) et $k=1$ ($T^1 = T$: OK!). Ici, on peut aussi calculer directement $T^k = \text{Mat}\,(u^k, \mathscr{B})$ comme on a calculer T. Les calculs sont exactement du même type que ceux de T.*

3) a) Soit $v \in C(u)$. Notons $\text{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Matriciellement, $u \circ v = v \circ u$ s'écrit

$$T \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 & b/2 & c/2 \\ -d-g & -e-h & -f-i \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 & -b & -b-c \\ d/2 & -e & -e-f \\ g/2 & -h & -h-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} T$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a/2 & = & a/2 \\ -d-g & = & d/2 \\ -g & = & g/2 \\ b/2 & = & -b \\ -e & = & -e-h \\ -h & = & -h \\ c/2 & = & -b-c \\ -f-i & = & -e-f \\ -i & = & -h-i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ d & = & 0 \\ g & = & 0 \\ b & = & 0 \\ h & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ c & = & 0 \\ i & = & e \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} d & = & 0 \\ g & = & 0 \\ b & = & 0 \\ h & = & 0 \\ c & = & 0 \\ i & = & e = \mu \\ a & = & \lambda \\ f & = & \delta \end{array}\right.$$

Conclusion : $\boxed{\text{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.}$

b) Réciproquement : soit $v \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\text{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

D'après ci-dessus (ce sont des équivalences), $v \in C(u)$.

c) D'après a) et b), l'application linéaire $v \mapsto \text{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B})$ est une bijection de $C(u)$ (espace vectoriel d'après 1.1) dans $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; (\lambda, \mu, \delta) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Or ce dernier espace vectoriel est de dimension 3. Ainsi, $\boxed{\dim(C(u)) = 3}$.

d) Montrons que (I_3, T, T^2) est libre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $aI_3 + bT + cT^2 = 0$.

$$aI_3 + bT + cT^2 = \begin{pmatrix} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} & 0 & 0 \\ 0 & a-b+c & -b+2c \\ 0 & 0 & a-b+c \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} & = & 0 \\ a-b+c & = & 0 \\ -b+2c & = & 0 \end{array}\right.$$

La résolution de ce système nous donne $a = b = c = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (\text{id}_E, u, u^2) \text{ est libre dans } \mathscr{L}(F).}$

e) D'après 1.2, $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$. D'après 2.3)c), $\dim C(u) = 3$. Donc $\mathbb{R}[u]$ est de dimension finie comme sous-espace vectoriel de $C(u)$, et d'après 2.3)d) $\dim \mathbb{R}[u] \geqslant 3$. Ainsi,

$$3 \leqslant \dim \mathbb{R}[u] \leqslant \dim C(u) = 3$$

Donc $\dim \mathbb{R}[u] = \dim C(u)$. Or ces deux espaces sont inclus l'un dans l'autre : $\boxed{C(u) = \mathbb{R}[u]}$

Partie 3 (Second exemple)

1) a) Soit $x \in E$. $u(x + u^2(x)) = u(x) + u^3(x) = (u + u^3)(x) = 0$. Donc $x + u^2(x) \in \text{Ker}\ u$.

$(u^2+\mathrm{id}_E)(u^2(x)) = u^4(x)+u^2(x) = u((u^3+u)(x)) = u(0) = 0$. Donc $u^2(x) \in \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)$.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in E \qquad x+u^2(x) \in \mathrm{Ker}\ u \quad \text{et} \quad u^2(x) \in \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)}$.

Montrons que $E \subset \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)$: Soit $x \in E$. D'après ci-dessus,

$$x = \underbrace{(x+u^2(x))}_{\in \mathrm{Ker}\,(u)} + \underbrace{(-u^2(x))}_{\in \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)}$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)$

Conclusion : $\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)}$.

b) Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)$: $u(x)=0$ et $(u^2+\mathrm{id}_E)(x)=0$.
Or $(u^2+\mathrm{id}_E)(x) = u^2(x)+x = x$. Ainsi $x=0$.
Donc $\mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E) = \{0\}$.
De plus, d'après a), $E = \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)$. Conclusion : $\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)}$

2) a) Soit $x \in F$. Montrons que $u(x) \in F$:

$$(u^2+\mathrm{id}_E)(u(x)) = u^3(x)+u(x) = 0$$

Donc $u(x) \in F$. Ainsi, $\boxed{F = \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E) \text{ est stable par } u.}$

(On vient en fait de montrer que $u(E) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)$, ce qui est plus fort que $u(F) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)$)

b) Soit $x \in F$. Par définition, $(u^2+\mathrm{id}_E)(x) = u^2(x)+x = 0$. Donc $v^2(x) = u^2(x) = -x$.
Ce qui signifie : $\boxed{v^2 = -\mathrm{id}_F}$

c) Comme $v^2 = -\mathrm{id}_F$, $\det(v^2) = \det(-\mathrm{id}_F) = (-1)^{\dim F}$. Or $\det(v^2) = (\det v)^2 > 0$.
Donc $\dim F$ est pair. Comme $F \subset E$, il nous reste deux possibilités : 0 ou 2.
Si $\dim F = 0$, alors $F = \{0\}$. Or $E = \mathrm{Ker}\ u \oplus F$ d'après 1)b). Donc, dans ce cas, $E = \mathrm{Ker}\ u$, ce qui signifie $u = 0$. D'après l'énoncé, on a supposé $u \neq 0$.
Ainsi, $\boxed{\dim(F) = 2}$

d) D'après 1)b), $E = \mathrm{Ker}\ u \oplus F$, donc en passant aux dimensions $3 = \dim \mathrm{Ker}\ u + \dim F$.
Par conséquent $\boxed{\dim \mathrm{Ker}\ u = 1}$ et $\mathrm{Ker}\ u \neq \{0\}$: $\boxed{u \text{ n'est pas injectif.}}$

3) a) Montrons que (e_2, e_3) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha e_2 + \beta e_3 = 0$$

Comme $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = u^2(e_3) = -e_2$ (on est dans F), il vient $u(\alpha e_2 + \beta e_3) = \alpha e_3 - \beta e_2 = 0$.

Or $\left\{\begin{array}{rcll} \alpha e_2 + \beta e_3 & = & 0 & (\times\beta) \\ -\beta e_2 + \alpha e_3 & = & 0 & (\times\alpha) \end{array}\right. \implies (\beta^2+\alpha^2)e_3 = 0.$

Comme $(\mathrm{Ker}\ u) \cap F = \{0\}$ (1)b)), $e_3 = u(e_2) \neq 0$, par conséquent $\beta^2+\alpha^2 = 0$.
Finalement, $\alpha = \beta = 0$: la famille (e_2, e_3) est libre.
De plus, $\dim F = 2$, donc $\boxed{(e_2, e_3) \text{ est une base de } F.}$

b) (e_1) est une base de $\mathrm{Ker}\ u$, (e_2, e_3) est une base de F (3)a)) et $E = \mathrm{Ker}\ u \oplus F$ (1)b)) donc

$$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } E.}$$

On a $\left\{\begin{array}{rcll} u(e_1) & = & 0 & (\text{car } e_1 \in \mathrm{Ker}\ u) \\ u(e_2) & = & e_3 & (\text{par définition de } e_3) \\ u(e_3) & = & u^2(e_2) = -e_2 & (\text{car } e_2 \in F = \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)) \end{array}\right.$ Donc

$$\boxed{A = \mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) La matrice A est diagonale bloc. Étudions le bloc $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$B^2 = -I_2$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^{2n} = (B^2)^n = (-1)^n I_2$ et $B^{2n+1} = B^{2n}B = (-1)^n B$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } A^{2n+1} = (-1)^n A}$

(Comme $u^3 = -u$, on pouvait en déduire $u^{2n+1} = (-1)^n u$)

4) a) Soit $B = \mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, où $v \in C(u)$. On procède comme au 2.3)a)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 0 & f & -e \\ 0 & i & -h \end{pmatrix} = BA$$

Puis, $\begin{cases} -g &= 0 \\ d &= 0 \\ 0 &= c \\ -h &= f \\ e &= i \\ 0 &= -b \\ -i &= -e \\ f &= -h \end{cases} \iff \begin{cases} g &= 0 \\ d &= 0 \\ c &= 0 \\ b &= 0 \\ i &= e \\ h &= -f \end{cases}$ Conclusion : $\boxed{B \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix}.}$

b) De même qu'en 2.3)c), $\boxed{\dim C(u) = 3}$

c) Montrons que (I_3, A, A^2) est une famille libre. Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $aI_3 + bA + cA^2 = 0$.

$$aI_3 + bA + cA^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-c & -b \\ 0 & b & a-c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a &= 0 \\ a-c &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$$

Ainsi $a = b = c = 0$. Donc la famille (id_E, u, u^2) est libre, dans $C(u)$ de dimension 3 (d'après b)).

Conclusion : $\boxed{(\mathrm{id}_E, u, u^2) \text{ est une base de } C(u).}$

Exercice 4 (EM Lyon, ECE, 2016)

Partie 1 (Étude de la matrice A)

1) $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$. Conclusion :

$$\boxed{A^3 = 2A}$$

2) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Comme $aI + bA + cA^2 = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}$,

$$aI + bA + cA^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a+c &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ a+2c &= 0 \end{cases} \Longrightarrow a = b = c = 0$$

En conclusion, $\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre}}$

3) **a)** Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -x & -1 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -2 & x \end{vmatrix} = x(x^2-2) = x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

Les valeurs propres de A sont donc

- $\lambda = 0$ de multiplicité 1,
- $\lambda = \sqrt{2}$ de multiplicité 1,
- $\lambda = -\sqrt{2}$ de multiplicité 1.

Le polynôme caractéristique a $n = 3$ racines de multiplicité 1 chacune, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

b) Sous-espaces propres :

- $\underline{E_0 = \text{Ker } A}$: $1 \leqslant \dim E_0 \leqslant \alpha = 1$, donc $\dim E_0 = 1$. De plus $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, donc

$$\boxed{E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

- $\underline{E_{\sqrt{2}} = \text{Ker}\,(\sqrt{2}I_3 - A)}$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}} \iff (\sqrt{2}I_3 - A)X = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x\sqrt{2} - y & = & 0 \\ -x + y\sqrt{2} - z & = & 0 \\ -y + z\sqrt{2} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x\sqrt{2} - y & = & 0 \\ -x + y\sqrt{2} - z & = & 0 \\ -x\sqrt{2} + z\sqrt{2} & = & 0 \end{array} \right.$$

$(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x\sqrt{2} \\ z & = & x \end{array} \right.$$

Conclusion :

$$\boxed{E_{\sqrt{2}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- $\underline{E_{-\sqrt{2}} = \text{Ker}\,(-\sqrt{2}I_3 - A)}$: $1 \leqslant \dim E_{-\sqrt{2}} \leqslant \alpha = 1$, donc $\dim E_{-\sqrt{2}} = 1$. De plus

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{E_{-\sqrt{2}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Bien mettre vecteurs propres et valeurs propres dans le même ordre.

Soit $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}}$ et $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ Alors $\boxed{A = PDP^{-1}}$

Partie 2 (Étude d'une application définie sur $\mathscr{E}$)

1) Par construction, $\mathscr{E} \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On peut prendre deux matrices M et M' dans $\mathscr{E}$, un $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrer que $\lambda M + M' \in \mathscr{E}$. Puis que $\mathscr{E} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathscr{E}$. Mais c'est plus long à taper, donc j'opte pour une autre méthode.

Nous avons calculé $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent,

$$\mathscr{E} = \left\{ aI + bA + cA^2 ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}\,(I, A, A^2)$$

Ainsi $\boxed{\mathscr{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

De plus, (I, A, A^2) est une famille génératrice de $\mathscr{E}$ puisque $\mathscr{E} = \text{Vect}\,(I, A, A^2)$. Comme (I, A, A^2) est libre d'après 2),

$$\boxed{\mathscr{B} = (I, A, A^2) \text{ est une base de } \mathscr{E}}$$

Et aussi, $\boxed{\dim \mathscr{E} = \text{Card}\,(\mathscr{B}) = 3}$

2)
- Linéarité : Soit $(M_1, M_2) \in \mathscr{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda A M_1 + A M_2 = \lambda f(M_1) + f(M_2)$$

  Donc f est linéaire.
- Espace d'arrivée : Soit $M = aI + bA + cA^2 \in \mathscr{E}$. Comme $A^3 = 2A$ d'après 1),

$$f(M) = AM = aA + bA^2 + cA^3 = (a + 2c)A + bA^2 \in \mathscr{E}$$

  Donc $f : E \to E$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{E}}$

3) **a)** Soit $M \in \mathscr{E}$. $f^3(M) = A(A(AM)) = A^3 M = 2AM = 2f(M)$. Ainsi, $\boxed{f^3 = 2f}$

b) *Le résultat vu en cours est un exercice : il faut le redémontrer.*

Soit $\lambda \in \text{Sp}\,(f)$, et $M \in \mathscr{E}$ un vecteur propre associé.

$$0 = f^3(M) - 2f(M) = \lambda^3 M - 2\lambda M = (\lambda^3 - 2\lambda)M$$

Or $M \neq 0$ car c'est un vecteur propre, donc $\boxed{\lambda^3 = 2\lambda}$

4)
- $f(I) = AI = A$
- $f(A) = AA = A^2$
- $f(A^2) = A^3 = 2A$

$$F = \text{Mat}\,(f, \mathscr{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(I) & f(A) & f(A^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ I \\ A \\ A^2 \end{array}$$

5) D'après 3)b), les seules valeurs propres possibles de f sont $\lambda = 0$, $\lambda = \sqrt{2}$ et $\lambda = -\sqrt{2}$:

$$\text{Sp}\,(f) \subset \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

Il n'y a qu'une inclusion car il n'y a qu'une implication dans un sens.

Un calcul du polynôme caractéristique nous donne, en remarquant une matrice triangulaire blocs inférieure,

$$\chi_f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & -2 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -2 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Donc $\boxed{\text{Sp}\,(f) = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}}$

Sous-espaces propres : On effectue les calculs dans la base $\mathscr{B}$. Chacun des sous-espace propre est de dimension 1 car toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1. On trouve les vecteurs colonnes suivants dans $\mathscr{B}$:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad X_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_{-\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, dans la base $\mathscr{B}$,

$$\boxed{E_0 = \text{Vect}\,(2I - A^2), \quad E_0 = \text{Vect}\,(2A + \sqrt{2}A^2), \quad E_0 = \text{Vect}\,(2A - \sqrt{2}A^2)}$$

Un sous-espace propre d'un endomorphisme $f : E \to E$ vit dans E. Donc ici ce sont des sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$: une fois les coordonnées $X_\lambda = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ obtenues dans la base $\mathscr{B} = (I, A, A^2)$, on remplace : $x_1 I + x_2 A + x_3 A^2$.

6) L'endomorphisme f n'est pas bijectif car Ker $f = E_0 \neq \{0\}$.
Il est diagonalisable car $\dim E_0 + \dim E_{\sqrt{2}} + \dim E_{-\sqrt{2}} = 3 = \dim \mathscr{E}$.

7) Nous avons déjà obtenu une base de Ker f car, d'après 5),

$$\boxed{\text{Ker } f = E_0 = \text{Vect}\,(2I - A^2)}$$

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Im } f = \dim \mathscr{E} - \dim \text{Ker } f = 2$.
Ainsi, il suffit de garder deux vecteurs colonnes de la matrice, non liés, par exemple les deux premiers, pour obtenir une base.

$$\boxed{(2I - A^2) \text{ est une base de Ker } f \text{ et } (A, A^2) \text{ est une base de Im } f.}$$

8) Comme $I + A^2 \notin \text{Im } f = \text{Vect}\,(A, A^2)$, $I + A^2$ n'a pas d'antécédent par f : l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$$

9) Comme $A + A^2 \in \text{Im } f$, l'ensemble des solutions est non vide, et de la forme $N_0 + \text{Ker } f$, où N_0 est une solution particulière.
On remarque que

$$f(I + A) = A(I + A) = A + A^2$$

Donc $N_0 = I + A$ est une solution particulière. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S} = (I + A) + \text{Ker } f = \{I + A + \lambda(2I + A) \ \mid \ \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 5

1) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Montrons que φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
<u>Étude en $+\infty$</u> : $\varphi(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$.
Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).
Donc, par équivalence, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $h(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$. Appliquons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après ci-dessus et, comme $xt^2 \geqslant 0$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty[\qquad |h(x,t)| = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

(Il est **fondamental** *que φ ne dépende pas de x. C'est le cœur du théorème.)*
Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

2) Soit $a > 0$ fixé. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-at^2}$.
Montrons que φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
<u>Étude en $+\infty$</u> : $t^2\varphi(t) \sim t^2 e^{-at^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.
Donc $\varphi(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$.
Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).
Donc, par comparaison, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2}{1+t^2}e^{-xt^2}$$

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est **intégrable** sur $[0, +\infty[$ d'après 1), la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t^2}{1+t^2}e^{-xt^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après ci-dessus et

$$\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times[0, +\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-t^2}{1+t^2}e^{-xt^2}\right| \leqslant \varphi(t)$$

(La remarque de la question 1) reste valable. De plus, l'hypothèse $\mathbf{t \mapsto h(x,t)}$ **intégrable** *de doit pas être oubliée !)*
Donc, d'après le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } C^1 \text{ sur } [a, +\infty[\text{ et } f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t.}$$

Ainsi

$$\forall x \in [a, +\infty[, f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$$

Soit $x \in [a, +\infty[$ fixé. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{x}t$: la fonction $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $\varphi(t) = \sqrt{x}t$ est bijective, strictement croissante ($x > 0$) et de classe $\mathscr{C}^1$.
On applique donc le théorème de changement de variable : les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{x}}$ sont de même nature, et comme la première converge (combinaison linéaire d'intégrales convergentes),

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE