Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (EM Lyon, ECE 2014)

1) $0 \in E$ (avec $a = b = c = 0$) donc $E \neq \emptyset$. De plus $E \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda M + M' = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ 0 & \lambda c + c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in E \qquad \text{avec} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & \lambda a + a' \\ \beta & = & \lambda b + b' \\ \gamma & = & \lambda c + c' \end{array} \right.$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Par conséquent $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel}}$

De plus $E = \operatorname{Vect}(A, B, C)$ *On pouvait commencer par là et en déduire tout de suite que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*

Montrons que (A, B, C) est libre : soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = 0$. C'est-à-dire

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_i = 0$ pour tout i. Ainsi (A, B, C) est libre.

Comme (A, B, C) est libre et génératrice, $\boxed{(A, B, C) \text{ est une base de } E}$

Par définition de la dimension, $\boxed{\dim E = 3}$

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in E$.

$$MM' = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in E \qquad \text{avec} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & aa' \\ \beta & = & ab' + bc' \\ \gamma & = & cc' \end{array} \right.$$

Conclusion : $\boxed{E \text{ est stable par multiplication.}}$

Plus généralement, les matrices triangulaires supérieures sont une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$.

3) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est inversible, alors $\det(M) = ac \neq 0$ donc $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

D'après les formules précédentes, $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$, donc $M^{-1} \in E$.

Conclusion : $\boxed{E \text{ est stable par passage à l'inverse (lorsque } M \text{ est inversible).}}$

4)
- Pour tout $M \in E$, $f(M)$ est un produit de matrices de E ($T \in E$), donc d'après 2) $f(M) \in E$.

- Soit $(M, M') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par distributivité,

$$f(\lambda M + M') = T(\lambda M + M')T = \lambda TMT + TM'T = \lambda f(M) + f(M')$$

Donc f est linéaire.

Finalement, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$

5) $\det T = 1 \neq 0$ donc $\boxed{T \text{ est inversible}}$
Posons $g(M) = T^{-1}MT^{-1}$. D'après 3), $T^{-1} \in E$ donc $g : E \to E$ de même qu'au 4).
De plus $f(g(M)) = M$ donc $f \circ g = \mathrm{id}_E$, et de même $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
Donc f est inversible : f est bijective. Comme f est un endomorphisme,

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E}$$

6)
- $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times A + 1 \times B$
- $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times B$
- $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times B + 1 \times C$

$$\boxed{F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

7) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in E_\lambda &\iff f(M) = \lambda M \\ &\iff \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & \lambda c \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& \lambda a \\ a+b+c &=& \lambda b \\ c &=& \lambda c \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} (1-\lambda)a &=& 0 \\ a+(1-\lambda)b+c &=& 0 \\ (1-\lambda)c &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(parce que $= 0$ c'est presque toujours mieux)

- Si $\lambda = 1$, il ne reste que $a + c = 0$ donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  D'où $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}$
- Si $\lambda \neq 1$, on trouve $a = c = 0$, puis $b = 0$, donc $\boxed{E_\lambda = \{0\}}$

8) $H^2 = 0$. Comme H et I_3 commutent ($HI = H = IH$), la formule du binôme de Newton s'écrit :

$$(I_3 + aH)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aH)^k I_3^{n-k}$$

Or $(aH)^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$ donc il ne reste plus que

$$(I_3 + aH)^n = I_3 + \binom{n}{1}(aH) = \boxed{I_3 + naH}$$

9) Comme $F = I_3 + H$, il vient $\boxed{F^n = I_3 + nH}$ d'après 8).

10) Avec $a=\dfrac{1}{3}$, $(I_3+\dfrac{1}{3}H)^3=I_3+H=F$, d'après 8). Donc $\boxed{G=I_3+\dfrac{1}{3}H}$

$\boxed{\text{Oui}}$: Soit g l'endomorphisme de E de matrice G dans la base (A,B,C).
Par construction de G (ci-dessus), $g^3=f$.

Exercice 2 (PT A 2014 – extrait)

1) Soit $g=f_{|\,\text{Im } f}$ la restriction de f à Im f.

- Montrons que Ker g = Ker $f \cap$ Im f :

$$\begin{aligned} x\in \text{Ker } g &\implies g(x)=0 \text{ et } x\in \text{Im } f\\ &\implies f(x)=0 \text{ et } x\in \text{Im } f \qquad (\text{car } g(x)=f(x))\\ &\implies x\in \text{Ker } f\cap \text{Im } f \end{aligned}$$

Donc Ker $g\subset$ Ker $f\cap$ Im f.

$$\begin{aligned} x\,\text{Ker } f\cap \text{Im } f\in &\implies f(x)=0 \text{ et } x\in \text{Im } f\\ &\implies g(x)=0 \qquad (\text{car } g(x)=f(x))\\ &\implies x\in \text{Ker } g \end{aligned}$$

Donc Ker $f\cap$ Im $f\subset$ Ker g.
Ainsi : Ker g = Ker $f\cap$ Im f.

- Le théorème du rang appliqué à g : Im $f\to E$ s'écrit

$$\dim(\text{Im } f)=\dim(\text{Im } g)+\dim(\text{Ker } g)$$

Or Im $g=f_{|\,\text{Im } f}(\text{Im } f)=f(f(E))=\text{Im } f^2$ et Ker g = Ker $f\cap$ Im f. Donc

$$\boxed{\dim(\text{Im } f)-\dim(\text{Im } f^2)=\dim(\text{Ker } f\cap\text{Im } f)}$$

2) Le théorème du rang appliqué à f et à f^2 s'écrit

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } f) &= \dim E-\dim(\text{Ker } f)\\ \dim(\text{Im } f^2) &= \dim E-\dim(\text{Ker } f^2) \end{aligned}$$

Donc en faisant la différence des deux lignes il vient :

$$\boxed{\dim(\text{Ker } f^2)-\dim(\text{Ker } f)=\dim(\text{Im } f)-\dim(\text{Im } f^2)}$$

3) *Cette question ressemblait à la question de cours* Ker $v\circ u$ = Ker u *etc... Avec de la persévérance, elle était donc largement faisable. Je ne dis pas qu'elle était facile, mais il faut savoir réutiliser les techniques vues en question de cours pendant les écrits.*

- Montrons que Ker $f\subset$ Ker f^2 :

$$x\in\text{Ker } f\implies f(x)=0\implies f(f(x))=f(0)=0\implies x\in \text{Ker } f^2$$

Donc Ker $f\subset$ Ker f^2.

- Montrons que Im $f^2\subset$ Im f :
Comme $f(E)\subset E$, on a Im $f^2=f(f(E))\subset f(E)=$ Im f.
On peut aussi, évidemment, procéder comme pour Ker f *et* Ker f^2.

$\boxed{\implies}$ Supposons Im f^2 = Im f. Donc $\dim(\text{Im } f)-\dim(\text{Im } f^2)=0$. D'après la question 2), il vient donc $\dim(\text{Ker } f^2)=\dim(\text{Ker } f)$.
Or d'après ci-dessus Ker $f\subset$ Ker f^2.
Donc par inclusion et égalité des dimensions, Ker f = Ker f^2.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons Ker $f^2 =$ Ker f. Donc dim(Ker f^2) − dim(Ker f) = 0. D'après la question 2), il vient donc dim(Im f^2) = dim(Im f).
Or d'après ci-dessus Im $f^2 \subset$ Im f.
Donc par inclusion et égalité des dimensions, Im $f^2 =$ Im f.

Conclusion : $\boxed{\text{Im } f^2 = \text{Im } f \text{ si et seulement si Ker } f^2 = \text{Ker } f}$

4) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons Im $f^2 =$ Im f.
Donc dim(Im f) − dim(Im f^2) = 0. D'après la question 1),

$$\dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f) = \dim(\text{Im } f) - \dim(\text{Im } f^2) = 0$$

Par conséquent Ker $f \cap$ Im $f = \{0\}$.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$.
Donc $E =$ Ker $f \oplus$ Im f.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $E =$ Ker $f \oplus$ Im f. Donc Ker $f \cap$ Im $f = \{0\}$.
D'après la question 1), il vient donc dim(Im f^2) − dim(Im f) = dim(Ker $f \cap$ Im f) = 0.
Or d'après un raisonnement effectué à la question précédente (**3)**), Im $f^2 \subset$ Im f.
Donc par inclusion et égalité des dimensions, Im $f^2 =$ Im f.
Conclusion : $\boxed{\text{Im } f^2 = \text{Im } f \text{ si et seulement si } E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f}$

Exercice 3 (Centrale-Supélec TSI 2012 étendu)

1) **a)** Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta(P) \in \mathbb{R}[X]$. De plus, $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q)(X) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda \Delta(P)(X) + \Delta(Q)(X)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p > 0$. Si $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, $\Delta(P)$ est au plus de degré p et

$$\Delta(P)(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{k} a_k \binom{k}{i} X^i - \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$$

- Le coefficient de degré p dans $\Delta(P)$ est $a_p \binom{p}{p} - a_p = 0$
- Le coefficient de degré $p-1$ dans $\Delta(P)$ est $a_p \binom{p}{p-1} + a_{p-1} - a_{p-1} = p a_p \neq 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{Si } \deg P = p > 0, \text{ alors } \deg \Delta(P) = p - 1.}$

c) Soit $P \in$ Ker Δ. Si $\deg P = p > 0$, alors $\deg \Delta(P) = p - 1 \geqslant 0$ donc $\Delta(P) \neq 0$. D'où $\deg P = 0$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 0. Alors P constant, et $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X) = 0$. D'où $P \in$ Ker Δ.
Donc $\boxed{\text{Ker } \Delta = \{P \in \mathbb{R}[X] | P \text{ constant}\} = \mathbb{R}_0[X].}$

d) D'après 1)b), si $\deg P > 0$, alors $\deg(\Delta(P)) = (\deg P) - 1$.
Donc si $\deg P = p \geqslant 0$, alors $\deg \Delta^p(P) = p - p = 0$.
Ainsi, d'après 1)c), $\Delta^p(P) \in$ Ker Δ puis $\Delta^{p+1}(P) = 0$.
Par conséquent, si $p \leqslant n-1$, $\Delta^n(P) = \Delta^{n-p-1}(\Delta^{p+1}(P)) = \Delta^{n-p-1}(0) = 0$.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \text{ alors } \Delta^n(P) = 0.}$

2) **a)** Δ_n est linéaire comme restriction d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel.
De plus, d'après 1)b), si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$.
Donc $\boxed{\Delta_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

b)

- $\Delta(1) = 0$
- $\Delta(X) = X + 1 - X = 1$
- $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$
- $\Delta(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$

$$\boxed{M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) On peut les calculer à l'aide de la matrice, ou bien directement.
$\text{Ker}\ \Delta_n = \text{Ker}\,(\Delta_{|\mathbb{R}_n[X]}) = (\text{Ker}\ \Delta) \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X]$. Donc $\boxed{\text{Ker}\ \Delta_n = \mathbb{R}_0[X].}$
D'après le théorème du rang, $\dim \text{Im}\ \Delta_n = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker}\ \Delta_n = n + 1 - 1 = n$. De plus, d'après 1)b), $\text{Im}\ \Delta_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, qui est de dimension n. Donc $\boxed{\text{Im}\ \Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$

d) Montrons que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ a un antécédent.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ pour un certain n (par exemple $n = \deg P$, si $P \neq 0$).
Donc $P \in \text{Im}\ \Delta_{n+1}$ d'après 2)c), c'est-à-dire $\exists Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X] /\ \Delta(Q) = P$.
Donc P admet un antécédent par Δ, et $\boxed{\text{l'application } \Delta \text{ est surjective.}}$

3) **a)** E est non vide car $0 \in E$. De plus, pour tout $P, Q \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda P(0) + Q(0) = 0$ donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$ [1]

b) L'application $\Delta_{|E}$ est linéaire comme restriction d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel.
De plus, $\text{Ker}\ \Delta_{|E} = \text{Ker}\ \Delta \cap E = \{0\}$. Donc $\Delta_{|E}$ est injective.
Montrons la surjectivité. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après 2)d), il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(Q) = P$. Soit un tel Q, posons $Q_0(X) = Q(X) - Q(0)$. Il vient

$$\Delta(Q_0)(X) = Q_0(X+1) - Q_0(X) = Q(X+1) - Q(0) - Q(X) + Q(0) = P(X)$$

Donc Q_0 est un antécédent de P dans E. Ainsi, $\Delta_{|E}$ est surjective.
Conclusion : $\boxed{\Delta_{|E} \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } \mathbb{R}[X].}$

4) **a)** Notons $f = \Delta_{|E}^{-1} : \mathbb{R}[X] \to E$. La suite récurrente (N_n) définie par

$$N_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad N_n = f(N_{n-1}) \tag{1}$$

existe et est unique. De plus, (N_n) vérifie les relations données par l'énoncé. Réciproquement, si (N_n) est une suite vérifiant la relation de l'énoncé, alors elle vérifie la relation (1), et est donc égale à la suite récurrente que l'on vient de construire.
Donc il existe une unique suite de polynômes $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$N_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta(N_n) = N_{n-1} \quad \text{et} \quad N_n(0) = 0$$

b) Pour montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$ est égale à (N_n), il suffit de prouver que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. C'est-à-dire qu'elles ont même premier terme et vérifie la même relation de récurrence :
$u_0 = \dfrac{1}{0!} \displaystyle\prod_{k=0}^{-1} (X - k) = 1$ (un produit vide est toujours égal à 1) [2]

1. On peut aussi remarquer que $E = \text{Ker}\ \varphi$ avec $\varphi : P \mapsto P(0)$.
2. On veut que $\displaystyle\prod_{i\in\emptyset} a_i \prod_{i\in I} a_i = \prod_{i\in\emptyset\cup I} a_i = \prod_{i\in I} a_i$. Ce qui entraîne donc $\displaystyle\prod_{i\in\emptyset} a_i = 1$ (dès que $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i \neq 0$). De même, $\displaystyle\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $u_{n+1} = f(u_n)$, c'est-à-dire que $\Delta(u_{n+1}) = 0$ et que $u_{n+1}(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
\Delta(u_{n+1}) &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\prod_{k=0}^{n}(X+1-k) - \prod_{k=0}^{n}(X-k)\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left((X+1)\prod_{k=0}^{n-1}(X-k) - (X-n)\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\right)\\
&= \frac{(X+1)-(X-n)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k) = u_n
\end{aligned}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X-k) = \frac{X(X-1)\dots(X-n)}{(n+1)!} \qquad \text{donc} \quad u_{n+1}(0) = 0$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ N_n(X) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}$

c) Montrons que la famille $(N_0, \dots, N_n)$ est libre. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i N_i = 0$.

Si $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$, notons i_0 le plus petit indice tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On remarque que i_0 est racine de N_i pour tout $i > i_0$. Il vient donc

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i N_i(i_0) = \sum_{i=i_0}^{n} \lambda_i N_i(i_0) = \lambda_{i_0}\frac{i_0(i_0-1)\dots(i_0-i_0+1)}{i_0!} = \lambda_{i_0}$$

Donc $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.
La famille $(N_0, \dots, N_n)$ est donc libre (On pouvait aussi remarquer directement que (N_i) est une famille de polynômes de degrés échelonnés, donc libre).
De plus $(N_0, \dots, N_n)$ contient $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$.
Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (N_0, \dots, N_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$
D'après le résultat précédent, toute sous-famille finie de $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Donc $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
De plus $\operatorname{Vect}(N_0, \dots, N_n) = \mathbb{R}_n[X]$, donc $\operatorname{Vect}(N_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}[X]$.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (N_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est libre et génératrice de } \mathbb{R}[X]\text{, donc c'est une base.}}$

d) Par construction, $\Delta(N_n) = N_{n-1}$ si $n > 0$ et $\Delta(N_0) = 0$. Donc $\boxed{M_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$

La matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}'$ est $\operatorname{Mat}(\operatorname{id}, \mathscr{B}', \mathscr{B})$. Il suffit donc de développer.

- $N_0 = 1$
- $N_1 = X$
- $N_2 = \frac{1}{2}X(X-1) = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$
- $N_3 = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2) = \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}X^2 + \frac{1}{6}X^3$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & 1/3\\ 0 & 0 & 1/2 & -1/3\\ 0 & 0 & 0 & 1/6\end{pmatrix}}$$

e) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(q) : \qquad \forall Q \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } q, \quad Q = \sum_{n=0}^{q} \Delta^n(Q)(0) N_n$$

est vraie pour tout $q \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: C'est le cas d'un polynôme constant. $\Delta^0 = \mathrm{id}$, donc $\Delta^0(Q)(0) = Q(0)$ et $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_q \Longrightarrow \mathcal{H}_{q+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(q)$ vraie. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $q+1$. Dans la base $(N_0, \ldots, N_{q+1})$ il s'écrit

$$Q = \sum_{n=0}^{q+1} a_n N_n \tag{2}$$

Le polynôme $\Delta(Q)$ est de degré q, donc il se décompose en

$$\begin{aligned} \Delta(Q) &= \sum_{n=0}^{q} \Delta^n(\Delta(Q))(0) N_n = \sum_{n=0}^{q} \Delta^{n+1}(Q)(0) N_n && (\mathcal{H}(q)) \\ &= \Delta\left(\sum_{n=0}^{q+1} a_i N_i\right) = \sum_{n=0}^{q+1} a_n \Delta(N_n) = \sum_{n=1}^{q+1} a_n N_{n-1} && (\text{définition des } N_i) \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \{1, \ldots, q+1\}$, $a_n = \Delta^n(Q)(0)$.
En évaluant (2) en 0, il vient $Q(0) = a_0$. Donc $a_0 = \Delta^0(Q)(0)$. Ainsi

$$Q = \sum_{n=0}^{q+1} \Delta^n(Q)(0) N_n$$

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall q \geqslant 0\ \forall Q \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } q \qquad Q = \sum_{n=0}^{q} \Delta^n(Q)(0) N_n}$

f) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ fixé. Notons $S = \{P \mid \Delta(P) = Q\}$ l'ensemble cherché.

On suppose $Q \neq 0$, soit $q = \deg Q$. D'après ci-dessus, $Q = \sum_{n=0}^{q} \Delta^n(Q)(0) N_n$. Posons

$$P_0 = \sum_{n=0}^{q} \Delta^n(Q)(0) N_{n+1}$$

Par définition des N_n, il vient $\Delta(P_0) = Q$. Cette formule est encore vérifiée lorsque $Q = 0$ (une somme vide est nulle).

Par conséquent $\boxed{S = P_0 + \mathrm{Ker}\ \Delta = \left\{\left(\sum_{n=0}^{q} \Delta^n(Q)(0) N_{n+1}\right) + K \ \mid\ K \in \mathbb{R}\right\}}$

g) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ fixé, et $P = \sum_{n=0}^{q} \Delta^n(Q)(0) N_{n+1}$. Ainsi, $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On obtient une somme télescopique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} Q(k) = \sum_{k=0}^{n} P(k+1) - \sum_{k=0}^{n} P(k) = P(n+1) - P(0)$$

Calculons P tel que $\Delta(P) = X^2$. On a $\Delta(X^2) = 2X+1$ et $\Delta^2(X^2) = \Delta(2X+1) = 2$, et

$$P = \sum_{n=0}^{2} \Delta^n(X^2)(0) N_{n+1} = N_2 + 2N_3 = \frac{1}{2}X(X-1) + \frac{1}{3}X(X-1)(X-2) = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$$

En conclusion : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

5) a) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n): \quad \Delta^n(Q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} Q(X+k)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est l'égalité $Q = Q$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1}(Q) &= \Delta(\Delta^n(Q)) = \Delta\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}Q(X+k)\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\Delta(Q(X+k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}Q(X+k+1) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}Q(X+k) \\
&= Q(X+n+1) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-(k-1)}\binom{n}{k-1}Q(X+k) \\
&\qquad -(-1)^n Q(X) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k+1}\binom{n}{k}Q(X+k) \\
&= Q(X+n+1) + (-1)^{n+1}Q(X) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)Q(X+k) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}Q(X+k)
\end{aligned}$$

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad \Delta^n(Q) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}Q(X+k)}$

b) D'après 1)d), $\Delta^n(X^r) = 0$. Donc l'égalité 5)b) s'écrit

$$0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(X+k)^r$$

En multipliant par $(-1)^n$ et en remarquant que $(-1)^{-k} = (-1)^k \times \left((-1)^{-k}\right)^2 = (-1)^k$, il vient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(X+k)^r = 0}$$

6) **a)** $0 \in C_n$ donc $C_n \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(g,h) \in C_n^2$.

$$(\lambda g + h)\circ \Delta_n = \lambda g \circ \Delta_n + h \circ \Delta_n = \Delta_n \circ (\lambda g) + \Delta_n \circ h = \Delta_n \circ (\lambda g + h)$$

Donc $\lambda g + h \in C_n$.

Conclusion : $\boxed{C_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X]).}$

b) Soit $(g,h) \in C_n^2$.

$$\begin{aligned}
g(N_n) = h(N_n) &\Longrightarrow \forall k \in \{0,\dots,n\} \quad \Delta_n^k \circ g(N_n) = \Delta_n^k \circ h(N_n) \\
&\Longrightarrow \forall k \in \{0,\dots,n\} \quad g \circ \Delta_n^k(N_n) = h \circ \Delta_n^k(N_n) \qquad (g,h \in C_n) \\
&\Longrightarrow \forall k \in \{0,\dots,n\} \quad g(\Delta^k(N_n)) = h(\Delta^k(N_n)) \qquad (\Delta_n = \Delta \text{ sur } \mathbb{R}_n[X]) \\
&\Longrightarrow \forall k \in \{0,\dots,n\} \quad g(N_{n-k}) = h(N_{n-k}) \qquad (\text{Par définition des } N_i) \\
&\Longrightarrow g = h \qquad ((N_0,\dots,N_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X])
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall (g,h) \in C_n^2 \quad g(N_n) = h(N_n) \Longrightarrow g = h}$

c) Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$. $g(N_n) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(N_0,\dots,N_n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc qu'il existe des réels $a_0,\dots,a_n$ tels que

$$g(N_n) = a_n N_n + \cdots + a_0 N_0$$

Si de plus $g \in C_n$, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $g(N_k) = g(\Delta_n^{n-k}(N_n)) = \Delta_n^{n-k}(g(N_n))$, donc

$$g(N_k) = \Delta_n^{n-k}(a_n N_n + \cdots + a_0 N_0) = a_n N_k + \cdots + a_{n-k} N_0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Mat}\,(g,\mathscr{B}',\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_n & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}}$

d) Notons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice avec des 1 au dessus de la diagonale et des 0 ailleurs. J est la matrice de Δ_n dans la base $\mathscr{B}'$.

On vient de montrer que tout endomorphisme $g \in C_n$ a une matrice (dans $\mathscr{B}'$) appartenant à $\text{Vect}\,(I_{n+1}, J, J^2, \dots, J^n)$, c'est-à-dire $g \in \text{Vect}\,(\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}, \Delta_n, \Delta_n^2, \dots, \Delta_n^n)$.

Ainsi $C_n \subset \text{Vect}\,(\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}, \Delta_n, \Delta_n^2, \dots, \Delta_n^n)$.

Réciproquement, $\Delta_n^k \in C_n$ est immédiat [3], donc $\text{Vect}\,(\text{id}\,, \Delta_n, \Delta_n^2, \dots, \Delta_n^n) \subset C_n$, d'où l'égalité.

De plus, la famille des $(J^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre (calculs immédiats [4]).

Donc $\boxed{C_n \text{ est de dimension } n+1, \text{ et } (\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}, \Delta_n, \Delta_n^2, \dots, \Delta_n^n) \text{ est une base de } C_n.}$

e) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$d \circ \Delta(P) = d(P(X+1) - P(X)) = P'(X+1) - P'(X) = \Delta \circ d(P)$$

Donc Δ et d commutent.

Soit $r > 0$ tel que $d \in C_r$. Donc $d = a_0\,\text{id}\, + a_1\Delta_r + \cdots + a_r\Delta_r^r$.

En évaluant en N_{r+1} on trouve $d(N_{r+1})(0) = a_0 N_{r+1}(0) + \cdots + a_r N_1(0) = 0$. Or 0 est racine simple de N_{r+1}, donc $d(N_{r+1})(0) = N'_{r+1}(O) \neq 0$, ce qui est contradictoire.

En conclusion, $\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ d \notin C_r.}$

Exercice 4

1) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que

$$\forall x \in E \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i(x) = 0$$

Soit $j \in [\![1, k]\!]$ et $x_j \in F_j - \{0\}$ (x_j existe car F_j non nul).

Par définition des projections $(p_i)_i$, pour tout $i \neq j$, $p_i(x_j) = 0$ et $p_j(x_j) = x_j$ donc

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i(x_j) = \alpha_j p_j(x_j) = \alpha_j x_j = 0$$

Comme $x_j \neq$, il vient $\alpha_j = 0$.

Donc $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $\alpha_j = 0$.

Conclusion : $\boxed{(p_1, \dots, p_k) \text{ est libre}}$

2) La famille $(p_1, \dots, p_k)$ est libre, et génératrice du sous-espace vectoriel $\text{Vect}\,(p_1, \dots, p_k)$, donc c'est une base de ce sous-espace.

Or cette famille contient k éléments.

Conclusion : $\boxed{\text{Vect}\,(p_1, \dots, p_k) \text{ est de dimension } k}$

3. voir note 4
4. Dans une copie, il faut bien entendu écrire les calculs. J'ai la flemme.

3) a) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\forall i \in [\![1,k]\!], \quad p_i \circ f = f \circ p_i$.

Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Montrons que $f(F_i) \subset F_i$. *(On écrit le début, la fin, et on essaye de faire apparaître $p_i \circ f$ ou $f \circ p_i$. Avec persévérance : si $p_i \circ f$ ne veut pas apparaître, on essaye avec $f \circ p_i$)*

$$\begin{aligned} x \in f(F_i) &\Longrightarrow \exists y \in F_i, \quad f(y) = x \\ &\Longrightarrow \exists y \in F_i, \quad f(p_i(y)) = x \qquad (\text{car } y \in F_i \text{ donc } p_i(y) = y) \\ &\Longrightarrow p_i(f(y)) = x \qquad (\text{car } fp_i = p_i f) \\ &\Longrightarrow p_i(x) = x \\ &\Longrightarrow x \in F_i \end{aligned}$$

Donc $\forall i \in [\![1,k]\!], f(F_i) \subset F_i$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\forall i \in [\![1,k]\!], f(F_i) \subset F_i$.

Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Montrons que $p_i \circ f = f \circ p_i$.

Soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{j=1}^{k} F_j$, on peut écrire $x = \sum_{j=1}^{k} x_j$ avec $x_j \in F_j$. Par linéarité de f,

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j)$$

Comme $f(F_j) \subset F_j$, $f(x_j) \in F_j$. Donc

$$p_i(f(x)) = p_i(f(x_i)) = f(x_i)$$

De plus, $p_i(x) = x_i$ donc $f(p_i(x)) = f(x_i)$. Ainsi, $p_i(f(x)) = f(p_i(x))$.

Par conséquent $p_i \circ f = f \circ p_i$.

Finalement : $\forall i \in [\![1,k]\!], \quad p_i \circ f = f \circ p_i$.

Conclusion :

$$\boxed{(\forall i \in [\![1,k]\!], \quad p_i \circ f = f \circ p_i) \Longleftrightarrow (\forall i \in [\![1,k]\!], f(F_i) \subset F_i)}$$

b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_{n_2}, \dots, e_{n_k})$ une base de E adaptée à la décomposition de E suivant les F_i.

D'après **3)a)**, f laisse stable tous les F_i, donc

$$\forall i \in [\![1,k]\!], \quad \forall p \in [\![n_{i-1}+1, n_i]\!], \qquad f(e_p) = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} a_{p,j} e_j$$

(Avec $n_0 = 0$)

En notant $A_i = (a_{p,j})_{n_{i-1}+1 \leqslant p,j \leqslant n_i}$, la matrice de f dans cette base est donc diagonale blocs :

$$\boxed{\operatorname{Mat}(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}}$$

4) a) Soit $u, v \in \Delta$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall g \in \operatorname{Vect}(p_1, \dots p_k), \qquad (\lambda u + v) \circ g = \lambda ug + vg = \lambda gu + gv = g \circ (\lambda u + v) \qquad (\text{Par linéarité de g})$$

Donc $\lambda u + v \in \Delta$. De plus $O \circ g = 0 = g \circ 0$, donc $\Delta \neq \emptyset$.

Conclusion : $\boxed{\Delta \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E) \text{ donc un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$

b) Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.

Si $f \in \Delta$, alors f commute avec chacun des p_i.

Ainsi, d'après **3)b)**, tout $f \in \Delta$ a une matrice diagonale blocs dans la base $\mathscr{B}$, avec k blocs de taille n_i^2. Posons $\varphi(f) = (A_1, \dots, A_k)$ la liste de ces blocs.

Montrons que $\varphi : \Delta \to \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

L'application φ est un morphisme par construction de la matrice d'une application linéaire dans une base.

Injectivité : Soit $f \in \Delta$ tel que $\varphi(f) = 0$. Donc f a pour matrice la matrice nulle, donc $f = 0$. Ainsi, φ est injective.

Surjectivité : Toute matrice diagonale blocs de ce type définit dans la base $\mathscr{B}$ un endomorphisme f qui laisse stable chacun des F_i, donc qui commute avec les p_i, puis par linéarité avec tout $g \in \Delta$. Donc tout élément de $\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{R})$ a un antécédent par φ.

Finalement, φ est un isomorphisme.

Conclusion : $\boxed{\dim \Delta = \dim(\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{R})) = n_1^2 + \cdots + n_k^2}$

Exercice 5

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Montrons qu'elle est intégrable en $+\infty$. Comme $|\operatorname{Arctan}| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

$$\forall t \in [0, +\infty[\qquad \left|\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{\pi/2}{1+t^2}$$

Or $\dfrac{\pi/2}{1+t^2} \sim \dfrac{\pi/2}{t^2}$, qui est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc par équivalent $t \mapsto \dfrac{\pi/2}{1+t^2}$ est intégrable en $+\infty$.

Donc par majoration $t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ l'est aussi.

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

2) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $D_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

Posons $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$.

La fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$ et en $+\infty$, $\varphi(t) \sim \dfrac{t}{t^2a^2t^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{1}{t^3}$ intégrable d'après Riemann ($3 > 1$) donc φ intégrable.

Soit $h(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}$. Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme pour $x \in D_a$:

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur D_a et sa dérivée est
$$x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}$$
- Pour tout $x \in D_a$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est **intégrable** sur $[0, +\infty[$ d'après 1),
la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction φ définie ci-dessus est intégrable sur $[0, +\infty[$ et
$$\forall (x,t) \in D_a \times [0, +\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t}{1+t^2} \times \frac{1}{1+(at)^2} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } C^1 \text{ sur } D_a \text{ et } f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}\,\mathrm{d}t.}$$

3) La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur chaque ensemble D_a, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Donc elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* = \bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} D_a$.