Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 15 novembre 2014

Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Pour tout $M \in E$, on pose $f(M) = TMT$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de E.
Quelle est la dimension de E ?

2) Établir que E est stable par multiplication.

3) Montrer que, pour tout matrice $M \in E$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in E$.

4) Montrer que f est un endomorphisme de E.

5) Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de E.

6) Déterminer la matrice F de f dans la base (A, B, C) de E.

7) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $E_\lambda = \{M \in E; f(M) = \lambda M\}$. On distinguera les cas $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$.

8) On note $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer H^2, puis, pour tout $a \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $(I_3 + aH)^n$.

9) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F^n.

10) Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de E tel que $g \circ g \circ g = f$?

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E. id_E désigne l'application identité de E.

1) Montrer que $\dim(\mathrm{Im}\ f) - \dim(\mathrm{Im}\ f^2) = \dim(\mathrm{Ker}\ f \cap \mathrm{Im}\ f)$.
Indication : *On pourra considérer la restriction de f à $\mathrm{Im}\ f$, $f_{|\,\mathrm{Im}\ f} : \mathrm{Im}\ f \to E;\ x \mapsto f(x)$.*

2) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\ f^2) - \dim(\mathrm{Ker}\ f) = \dim(\mathrm{Im}\ f) - \dim(\mathrm{Im}\ f^2)$.

3) En déduire que $\mathrm{Im}\ f^2 = \mathrm{Im}\ f$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\ f^2 = \mathrm{Ker}\ f$.

4) Montrer que $\mathrm{Im}\ f^2 = \mathrm{Im}\ f$ si et seulement si $E = \mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f$.

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels.
On définit sur $\mathbb{R}[X]$ l'application Δ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Delta(P)$ défini par :

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'endomorphisme Δ^n obtenu en composant n endomorphismes égaux à Δ :

$$\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$$

1) **a)** Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p > 0$, déterminer le degré du polynôme $\Delta(P)$.

c) En déduire le noyau de Δ.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de ce qui précède que, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors $\Delta^n(P) = 0$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[x]$.

a) Justifier que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Donner la matrice M_3 de Δ_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

c) Déterminer le noyau et l'image de Δ_n.

d) En déduire que l'application Δ est surjective.

3) Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que la restriction de Δ à E est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

4) **a)** Déduire de la question précédente qu'il existe uns unique suite de polynômes $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$N_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta(N_n) = N_{n-1} \quad \text{et} \quad N_n(0) = 0$$

(N_n est appelé le polynôme de Newton d'indice n).

b) Vérifier que

$$N_n(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$$

c) Montrer que la famille $(N_0, \dots, N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, puis que la famille $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

d) Donner la matrice M_3' de Δ_3 dans la base $\mathscr{B}' = (N_0, \dots, N_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}'$.

e) Montrer que pour tout polynôme Q de degré q, on a

$$Q = \sum_{n=0}^{q} \Delta^n(Q)(0) N_n$$

f) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ fixé. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) - P(X) = Q(X)$.

g) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(k)$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

5) **a)** Établir que, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\Delta^n(Q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} Q(X+k)$$

b) En déduire, pour tout entier r vérifiant $0 \leqslant r \leqslant n-1$, l'égalité suivante, à l'aide de **1d)** et de la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (X+k)^r = 0$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit C_n le commutant de Δ_n, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphisme qui commutent avec Δ_n

$$C_n = \{g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X]) \mid g \circ \Delta_n = \Delta_n \circ g\}$$

a) Montrer que C_n est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

b) Pour tout $(g,h) \in C_n^2$, montrer que $g(N_n) = h(N_n) \Longrightarrow g = h$.

c) Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Montrer qu'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que

$$g(N_n) = a_n N_n + \cdots + a_0 N_0$$

Donner la matrice de $g \in C_n$ relativement à la base $(N_0, \ldots, N_n)$.

d) En déduire que C_n est de dimension $n+1$ et que $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}, \Delta_n, \Delta_n^2, \ldots, \Delta_n^n)$ est une base de C_n.

e) On note d la dérivation dans $\mathbb{R}[X]$, définie par $d : P \mapsto P'$. Montrer que $d \circ \Delta = \Delta \circ d$.
Montrer par l'absurde que d n'est dans aucun C_r. On pourra calculer de deux façons $d(N_{r+1})(0)$, après avoir décomposé d dans la base de C_r trouvée à la question **6d)**.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $F_1, \ldots, F_k$ une famille de sous-espaces vectoriels non nuls de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$.
Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on note p_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{j=1, j\neq i}^{j=k} F_j$.

1) Montrer que $(p_1, \ldots, p_k)$ est libre.

2) Justifier que $\mathrm{Vect}\,(p_1, \ldots, p_k)$ est de dimension k.

3) Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que

$$(\forall i \in [\![1,k]\!], \quad f \circ p_i = p_i \circ f) \Longleftrightarrow (\forall i \in [\![1,k]\!], f(F_i) \subset F_i)$$

b) On suppose que f commute avec tous les p_i. Donner la forme de la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition de E suivant les F_i.

4) On note Δ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de $\mathrm{Vect}\,(p_1, \ldots p_k)$.

a) Justifier que Δ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Déterminer sa dimension.

Exercice 5

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, f est $\mathscr{C}^1$ sur $D_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ et donner l'expression de f'.

3) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

FIN DE L'ÉPREUVE