Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (PT 2013 C)

1) La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est cos, qui est bornée (en valeurs absolues) par 1. Donc l'inégalité des accroissements finis entre 0 et $t \in \mathbb{R}_+^*$ s'écrit

$$|\sin(t) - \sin(0)| \leqslant 1 \times |t - 0|$$

Ainsi, en divisant par $t > 0$, $\boxed{\text{Pour tout réel } t \text{ strictement positif, } \dfrac{|\sin t|}{t} \leqslant 1}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

- Étude de f : La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{e^{-xt}\sin t}{t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
  En 0 : $\left|\dfrac{e^{-xt}\sin t}{t}\right| \sim e^{-xt} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc la fonction φ est prolongeable par continuité en 0, et l'intégrale converge.
  En $+\infty$: D'après 1), $\dfrac{|\sin t|}{t} \leqslant 1$ donc $|\varphi(t)| \leqslant e^{-xt}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le critère des exponentielles ($x > 0$).
  Conclusion : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente, et $f(x)$ existe.
- Étude de g : La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}\cos t}{x}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
  De plus, $\left|\dfrac{e^{-xt}\cos t}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}e^{-xt}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le critère des exponentielles ($x > 0$).
  Conclusion : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente, et $g(x)$ existe.

Finalement : $\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont définies sur } \mathbb{R}_+^*}$

3) Soit a un réel strictement positif. Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre sur l'intervalle $D = [a, +\infty[$, qui nous donne directement que la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ (et donc continue).

Soit $h : [a, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-xt}\sin t}{t}$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après 2).
  Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-te^{-xt}\sin t}{t} = -e^{-xt}\sin t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après le critère des exponentielles ($a > 0$) et

$$\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = |\sin t| e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{ et } f'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t.}$$

On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t\,\mathrm{d}t$ (par linéarité).
Nous allons avoir besoin de la fonction $\varphi(t) = te^{-at}$, définie sur $[0,+\infty[$. φ est continue par morceaux, et par croissance comparée, comme $a > 0$,

$$t^2\varphi(t) = t^3e^{-at} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc par définition de la limite, il existe $t_0 > 0$ tel que $\forall t \geqslant t_0$, $|t^2\varphi(t)| \leqslant 1$, puis $|\varphi(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
Or $\dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par majoration φ est intégrable.
Évitez de mettre la preuve de l'intégrabilité de la fonction φ au milieu du théorème, lorsqu'il y a plus d'un mot à dire (par exemple, au-dessus, c'est immédiat (critère des exponentielles), pas de problème).
Soit $h : [a,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = e^{-xt}\cos t$.

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après 2).
  Pour tout $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -te^{-xt}\cos t$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = te^{-at}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (ci-dessus) et

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-xt}|\cos t| \leqslant te^{-at} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto -\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-xt}\cos t\,\mathrm{d}t$.
Ainsi, comme produit de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ ($x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\mathscr{C}^1$),

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[.}$$

4) Comme f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, elles sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Soit $x > 0$ fixé.
Pour $X > 0$, on intègre par partie :

$$\int_0^X \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt}\sin t}{x}\right]_0^X + \int_0^X e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{e^{-xX}\sin X}{x}}_{\xrightarrow[X\to+\infty]{}0} + \int_0^X e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t$$

J'insiste lourdement : il ne s'agit **pas** *de $f'(x)$ et $g(x)$ pour l'instant !*
Donc en passant à la limite pour $X \to +\infty$:

$$\boxed{f'(x) = -g(x)}$$

5) *Les questions de calculs d'intégrales ne sont jamais complètement affreuses. On peut s'en sortir par une IPP, mais le calcul direct comme en sup marche ausis.*
Soit $x > 0$. $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t$, c'est donc la partie imaginaire de l'intégrale de $e^{-xt}e^{it} = e^{(-x+i)t}$, que l'on peut sortir de l'intégrale par linéarité et continuité de la partie imaginaire. De plus

$$\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{-x+i}$$

Il ne reste plus qu'à prendre la partie imaginaire de $\dfrac{1}{-x+i} = \dfrac{-x-i}{(-x+i)(-x-i)} = \dfrac{-x-i}{1+x^2}$:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}}$$

6) Au 2), nous avions montré (à l'aide du 1)) que $\left|\dfrac{e^{-xt}\sin t}{t}\right| \leqslant e^{-xt}$. Donc

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Par majoration, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Jusqu'ici, le sujet pose les mêmes questions que l'exercice 28. Transformée de Laplace... No comment.

7) D'après 5), f est une primitive[1] de $-\dfrac{1}{1+x^2}$, donc de la forme $K - \operatorname{Arctan} x$.

De plus, d'après 6), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = K - \dfrac{\pi}{2}$, donc $K = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x}$$

8) **a)** *Ceci relevait, pour vous, de la question de cours.*

Étude en $t = 0$: $\dfrac{\sin t}{t} \sim \dfrac{t}{t} = 1$ donc $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité, et par conséquent intégrable en 0.

Étude en $t = +\infty$: Soit $T > 1$. Effectuons une intégration par parties.

$$\int_1^T \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\cos t}{t}\right]_1^T + \int_1^T \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, comme cos est bornée, $\lim\limits_{T\to+\infty} \left(\dfrac{\cos T}{T} - \cos 1\right) = \cos 1$ et donc existe.

De plus $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$ d'après Riemann, donc par majoration $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Conclusion. $\lim\limits_{T\to+\infty} \displaystyle\int_1^T \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe : $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$

b) La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et $\varphi'(t) = \dfrac{-1+(t+1)e^{-t}}{t^2}$.

Au voisinage de $t = 0$, $\varphi(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t} = \dfrac{1-1+t+o(t)}{t} \sim 1$ donc $\lim\limits_{t\to0} \varphi(t)$ existe et vaut 1.

De même[2], $\varphi'(t) = \dfrac{-1+1-t+\frac{t^2}{2}+t-t^2+o(t^2)}{t^2} \sim -\dfrac{1}{2}$.

Donc, d'après le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$,

$$\boxed{\varphi \text{ est prolongeable par } \varphi(0) = 1 \text{ en une fonction } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

c) On effectue le changement de variable $u = xt$, sans problème vu que $x \neq 0$.

d) D'après b), φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, on peut donc effectuer une intégration par partie ($X > 0$) :

$$\int_0^X \varphi(u)\sin\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u = \left[-\varphi(u)x\cos\left(\frac{u}{x}\right)\right]_0^X + \int_0^X \varphi'(u)x\cos\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u$$

1. *Vous savez, le truc défini à une* CONSTANTE *près*
2. Vous avez fait largement pire comme DL...

De plus, $\left|\varphi(X)\cos\left(\frac{X}{x}\right)\right| \leqslant \frac{\left|1-e^{-X}\right|}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$, donc $\left[-\varphi(u)x\cos\left(\frac{u}{x}\right)\right]_0^X \xrightarrow[X\to+\infty]{} \varphi(0)x = x$.
Lorsque $X \to +\infty$, l'intégrale du membre de gauche est $h(x) = \alpha - f(x)$, qui est donc une intégrale convergente comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes.
De plus, le crochet converge (ci-dessus, vers x), donc l'intégrale du membre de droite converge aussi, et il vient

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \varphi(u)\sin\left(\frac{u}{x}\right)\,\mathrm{d}u = x + x\int_0^{+\infty} \varphi'(u)\cos\left(\frac{u}{x}\right)\,\mathrm{d}u}$$

e) *On veut une constante K, c'est-à-dire qu'on veut se débarrasser du x qui traîne dans l'intégrale.*
Pour tout $u > 0$, $|u^2\varphi'(u)| = |-1+(u+1)e^{-u}| \leqslant 1+(1+u)e^{-u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 1$.
Donc, par définition de la limite (pour $\varepsilon = 1$), il existe $u_0 > 0$ tel que pour tout $u \geqslant u_0$, $0 \leqslant u^2\varphi'(u) \leqslant 2$, puis $0 \leqslant \varphi'(u) \leqslant \frac{2}{u^2}$, qui est intégrable en $+\infty$ d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).
Ainsi, φ' intégrable sur $[0, +\infty[$, donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \varphi'(u)\cos\left(\frac{u}{x}\right)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\varphi'(u)\cos\left(\frac{u}{x}\right)\right|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

En posant $K = 1 + \int_0^{+\infty} \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, l'égalité obtenue en d) nous donne

$$\boxed{|h(x)| \leqslant x + x\left|\int_0^{+\infty} \varphi'(u)\cos\left(\frac{u}{x}\right)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant x + x\int_0^{+\infty} \varphi'(u) = Kx}$$

f) D'après la question e), $\lim_{x\to 0, x\neq 0} h(x) = 0$. Il reste à vérifier la valeur de $h(0)$:

$$h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-0t}}{t}\sin t\,\mathrm{d}t = 0$$

Donc $\lim_0 h = 0 = h(0)$, et $\boxed{h \text{ est continue en } 0}$
Comme l'énoncé le suggère au 8)a), $h(x) = \alpha - f(x)$. On en déduit donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha}$.

9) D'après 7), pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$. De plus, d'après 8)f), $\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha$. Donc

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right) = \boxed{\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 2 (D'après E3A PSI 2013 A et Centrale PC 2013 1)

1) Pour $X > 0$, $\int_0^X \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [\operatorname{Arctan}(u)]_0^X = \operatorname{Arctan}(X) \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.
Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.
De même, $\int_0^X \frac{\lambda}{\lambda^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^X \frac{1/\lambda}{1+(u/\lambda)^2}\,\mathrm{d}u = [\operatorname{Arctan}(u/\lambda)]_0^X = \operatorname{Arctan}(X/\lambda) \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$
Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2+u^2}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.
Par conséquent l'intégrale de l'énoncé converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes, et,

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2}\right)\,\mathrm{d}u = 0}$$

2) **a)** $|1-xe^{it}|^2=(1-xe^{it})(1-xe^{-it})=1-2x\cos(t)+x^2$. Donc $\boxed{|1-xe^{it}|=\sqrt{1-2x\cos(t)+x^2}}$

b) D'après 1), $1-2x\cos(t)+x^2=|1-xe^{it}|^2\geqslant 0$ (comme module).
De plus, $1-2x\cos(t)+x^2=0$ si et seulement si $1-xe^{it}=0$, ce qui implique entre autre $|xe^{it}|=|x|=1$.

Finalement, $\boxed{\text{Si } x \text{ est un réel différent de } 1 \text{ et } -1, \text{ alors } 1-2x\cos(t)+x^2>0 \text{ pour tout } t\in\mathbb{R}}$

c)
- Soit $\varphi(t)=\ln(\sin t)$. La fonction φ est définie et continue sur $]0,\pi[$ ($\sin>0$ sur cet intervalle).
  Étude en 0^+ : $\varphi(t)=\ln(t+o(t^2))=\ln(t(1+o(1)))=\ln(t)+\underbrace{\ln(1+o(1))}_{\xrightarrow[t\to 0]{}\ln(1)=0}\sim\ln(t)$.
  Or $\ln(t)$ est intégrable en 0 (primitive $t\ln t-t$). Donc, par équivalent, φ est intégrable en 0.
  Étude en π^- : $\varphi(\pi-h)=\ln(\sin(\pi-h))=\ln(\sin(h))=\varphi(h)$, or φ intégrable en 0, donc φ intégrable en π.
  Conclusion : $\boxed{\int_0^\pi \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$
- Soit $\varphi(t)=\ln(1-\cos t)$. La fonction φ est définie et continue sur $]0,\pi]$ ($1-\cos>0$ sur cet intervalle). On procède comme ci-dessus.
  Étude en 0^+ : $\varphi(t)=\ln\left((1-(1-t^2/2+o(t^2))\right)=\ln(t^2(1+o(1)))=2\ln(t)+\ln(1+o(1))\sim\ln(t)$.
  Donc, par équivalent, φ est intégrable en 0.
  Conclusion : $\boxed{\int_0^\pi \ln(1-\cos t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$
- Le changement de variable $u=\pi-t$ s'écrit $\int_0^\pi \ln(1+\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi \ln(1-\cos u)\,\mathrm{d}u$, or d'après ci-dessus, l'intégrale en u converge, donc $\boxed{\int_0^\pi \ln(1+\cos t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$

d) Soit $\varphi(t)=\ln(1-2x\cos(t)+x^2)$.
Cas $x\notin\{-1,1\}$: Pour x différent de -1 et 1, d'après 2)b), $(1-2x\cos(t)+x^2)>0$ pour tout $t\in[0,\pi]$. Donc $\varphi(t)$ bien définie (et continue) sur $[0,\pi]$.
L'intégrale $\int_0^\pi \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,\mathrm{d}t$ n'est donc pas impropre, et converge.
Cas $x\in\{-1,1\}$: On retrouve les deuxièmes et troisièmes intégrales du 2)c), qui convergent.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R}, \text{ l'intégrale } \int_0^\pi \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

3) Pour $x=1$, nous avons déjà montré en 2)c) que $h(1)=h(-1)$.
Pour $x\notin\{-1,1\}$, effectuons le même changement de variable $u=\pi-t$:

$$h(x)=\int_\pi^0 \ln(1-2x\cos(u-\pi)+x^2)(-1)\,\mathrm{d}u=\int_0^\pi \ln(1+2x\cos(u)+x^2)\,\mathrm{d}u=h(-x)$$

Donc $\boxed{\text{La fonction } h \text{ est paire.}}$

De plus, $\boxed{h(0)=\int_0^\pi \ln(1-2\times 0\times\cos(t)+0^2)\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi \ln(1)\,\mathrm{d}t=0}$

4) Soit $a\in]0,1[$. Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre sur l'intervalle $D=[0,a]$.
Nous allons avoir besoin de l'inégalité suivante :

$$\forall(x,t)\in[0,a]\times[0,\pi],\qquad 1-2x\cos(t)+x^2\geqslant 1-2x+x^2=(1-x)^2\geqslant(1-a)^2$$

(On se rappelle que, d'après 2)a), $1-2x\cos(t)+x^2\geqslant 0$).
Soit $g:[0,a]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}$ définie par $g(x,t)=\ln(1-2x\cos(t)+x^2)$.
Les intégrales sont toutes sur un segment.
- Pour tout $t\in[0,\pi]$, la fonction $x\mapsto g(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$.

- Pour tout $x \in [0,a]$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,\pi]$ d'après 2) (de toute façon, c'est une intégrale sur un segment).
  Pour tout $x \in [0,a]$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2\cos(t)+2x}{1-2x\cos(t)+x^2}$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$.
- La fonction $\varphi(t) = \dfrac{2+2a}{(1-a)^2}$ constante est évidemment intégrable sur $[0,\pi]$ (segment) et

$$\forall (x,t) \in [0,a]\times[0,\pi] \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2|\cos(t)|+2x}{1-2x\cos(t)+x^2} \leqslant \frac{2+2a}{(1-a)^2} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,a] \text{ et } h'(x) = -\int_0^\pi \frac{2\cos(t)+2x}{1-2x\cos(t)+x^2}\,\mathrm{d}t.}$$

De plus, comme h est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$ pour tout $a \in]0,1[$, elle est $\mathscr{C}^1$ sur l'union de ces segments :

$$\boxed{h \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,1[}$$

5) $t \mapsto \tan(t/2)$ est un C^1 difféomorphisme de $]0,\pi[$ dans $]0,+\infty[$. C'est donc un bon changement de variable (on a ici des contraintes plus grandes sur le changement de variable car il n'est pas défini sur le segment et introduit donc des intégrales impropres). En remarquant que $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ où $u = \tan(t/2)$ et comme (c'est une identité formelle) $dt = \dfrac{2du}{1+u^2}$, on a

$$\int_0^\pi \frac{x-\cos(t)}{1-2x\cos(t)+x^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{(x-1)+u^2(x+1)}{(1+u^2)((1+x)^2u^2+(1-x)^2}\,du$$

Il suffit alors de factoriser par $(x+1)$ au numérateur et par $(x+1)^2$ au dénominateur pour, en posant $\lambda = \dfrac{1-x}{1+x}$, obtenir

$$\int_0^\pi \frac{x-\cos(t)}{1-2x\cos(t)+x^2}\,dt = \frac{2}{x+1}\int_0^{+\infty} \frac{u^2-\lambda}{(u^2+\lambda^2)(u^2+1)}\,du$$

Une réduction au dénominateur commun donne

$$\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2} = \frac{(1-\lambda)(u^2-\lambda)}{(u^2+1)(u^2+\lambda^2)}$$

Comme $\dfrac{2x}{1+x} = 1-\lambda$, dans le cas où $x \neq 0$ (cela n'intervient qu'ici) on a $\dfrac{2}{(x+1)(1-\lambda)} = \dfrac{1}{x}$ et ainsi

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{x-\cos(t)}{1-2x\cos(t)+x^2}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2}\right)}$$

[UPS]

6) D'après la question 3), la fonction h est paire, et d'après la question 4) elle est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.
Donc par parité, $\boxed{h \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-1,1[}$
D'après 1), l'intégrale du membre de gauche est nulle, donc pour tout $x \in]0,1[$, $h'(x) = 0$. De plus, h' est continue sur $[0,1[$ d'après 4), donc $h'(0) = 0$ aussi. Par parité, $\boxed{h'(x) = 0 \text{ pour tout } x \in]-1,1[}$
Par conséquent, h est constante sur $]-1,1[$. Or d'après 3), $h(0) = 0$.
Conclusion $\boxed{h = 0 \text{ sur }]-1,1[}$

7) Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
h(1/x) &= \int_0^\pi \ln\Big(1 - \frac{2}{x}\cos(t) + \frac{1}{x^2}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \ln\Big(\frac{x^2 - 2x\cos(t) + 1}{x^2}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \ln(x^2)\,\mathrm{d}t \\
h(1/x) &= \boxed{h(x) - 2\pi\ln|x|}
\end{aligned}$$

8) Comme $h = 0$ sur $]-1,1[$ d'après 6), et que $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ implique $\dfrac{1}{x} \in]-1,1[$, la question précédente s'écrit

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[, \qquad h(x) = h(1/x) + 2\pi\ln|x| = 2\pi\ln|x|}$$

9) **a)** Comme $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, il vient

$$\int_0^\pi \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, comme $\sin(\pi/2 - u) = \cos(u)$, (l'intégrale en cos converge via le changement de variable)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\cos u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

Conclusion : $\boxed{\int_0^\pi \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t}$

b) De plus, avec $u = 2t$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left(\frac{\pi\ln 2}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \pi\ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \pi\ln 2 + 2\int_0^\pi \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par conséquent $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\pi\ln 2$.

c) Par parité, les intégrales sont égales, et leurs somme vérifie

$$\int_0^\pi \ln\Big((2-2\cos t)(2+2\cos t)\Big)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \ln(4(1-\cos^2 t))\mathrm{d}t = 2\pi\ln 2 + \int_0^\pi 2\ln(\sin t)\mathrm{d}t = 2\pi\ln 2 - 2\pi\ln 2 = 0$$

Ainsi $\boxed{\int_0^\pi \ln(2 - 2\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \ln(2 + 2\cos t)\,\mathrm{d}t = 0}$

10) En résumé :

$$\boxed{\begin{aligned} h(x) &= 0 && \text{Si } x \in [-1,1] \\ &= 2\pi\ln|x| && \text{Si } x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1] \end{aligned}}$$

Exercice 3 (Agro 2008, extrait)

1) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \widehat{P}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}x^k \xrightarrow[x\to 0]{} a_0 = P(0)$$

Donc $\widehat{P}$ est bien une $\boxed{\text{fonction polynomiale}}$. De plus $\dfrac{a_n}{n+1} \neq 0$, donc elle est bien $\boxed{\text{de degré } n}$.

Au dernières nouvelles, $\frac{1}{x}$ n'est pas un polynôme, ni $\frac{x+1}{x}$: il y avait quelque chose (fonction polynomiale) à prouver dans cette question, en plus de la question $x=0$.

2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après 1), $\psi(P) \in \mathbb{R}[X]$.
De plus, par linéarité de l'intégrale, $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \psi(\lambda P+Q)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda P+Q)(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^x Q(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\psi(P)(x)+\psi(Q)(x)$$

De même en 0 : $\psi(\lambda P+Q)(0) = P(0)+\lambda Q(0) = \lambda\psi(P)(0)+\psi(Q)(0)$. Donc ψ est linéaire.
Conclusion : $\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$

3) D'après 2), $\psi_{|\mathbb{R}_2[X]}$ est linéaire. De plus, $\deg \widehat{P} = \deg P$ d'après 1), donc $P \in E \Longrightarrow \widehat{P} \in E$.
Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme.}}$

Comme $\varphi(X^k) = \dfrac{1}{k+1}X^k$, la matrice M de φ dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

4) Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k P_k = 0$.
En évaluant en $x=1$, $x=-1$ (racines...) et $x=0$, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4\alpha_3 & = & 0 \\ 4\alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

Donc la famille $\mathscr{B}' = (P_1,P_2,P_3)$ est libre.
De plus Card $\mathscr{B}' = 3 = \dim E$. Ainsi, $\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' = (P_1,P_2,P_3) \text{ est une base de } E.}$

5) $\mathscr{B}'$ est une base de E, donc il existe un unique $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k P_k = P$.
D'après ci-dessus, en évaluant en $x=1$ et $x=-1$ il vient $\alpha_3 = P(1)/4$ et $\alpha_1 = P(-1)/4$. De plus

$$P'(1) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k P_k'(1) = \alpha_2 P_2'(1) + \alpha_3 P_3'(1) = 2\alpha_2 + 2\alpha_3$$

Donc $\alpha_2 = (2P'(1)-P(1))/4$.
Ainsi, $\boxed{\text{Les coordonnées de } P \text{ sont } (P(-1)/4, (2P'(1)-P(1))/4, P(1)/4).}$

Exercice 4 (CCP PC 2008 Maths 2, extrait)

1) Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1[$, posons $\varphi_x(t) = (1-t^2)^x = e^{x\ln(1-t^2)}$. Pour que φ_x soit définie, il faut (et il suffit) que ce qui est dans le logarithme soit strictement positif, c'est-à-dire que $|t| < 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction φ_x est continue par morceaux sur $[0,1[$.
Etude en $t=1$: $\varphi_x(1-h) = (1-(1-h)^2)^x = h^x(2-h)^x \sim h^x = \dfrac{1}{h^{-x}}$. Qui est intégrable (en $h=0$) si et seulement si $-x<1$, d'après Riemann.
Donc φ_x intégrable sur $[0,1[$ si et seulement si $x > -1$.
En conclusion, $\boxed{\text{Le domaine de définition de } \beta \text{ est } \mathscr{D} =]-1,+\infty[.}$

2) **a)** Soit $a \in]-1,+\infty[$. Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre sur l'intervalle $D = [a,+\infty[$.

Nous allons avoir besoin de l'intégrabilité de $\varphi(t) = -\ln(1-t^2)(1-t^2)^a$ sur $[0,1[$. Posons $t = 1-h$:

$$\ln(1-(1-h)^2)(1-(1-h)^2)^a = (ln(h)+\ln(2-h))h^a(2-h)^a \sim \frac{\ln h}{h^{-a}}$$

On se retrouve dans le cas d'une intégrale de Bertrand. Étude rapide.

Or, comme $a > -1$, $\dfrac{1+a}{2} > 0$ et $h^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{\ln h}{h^{-a}} = h^{\frac{1+a}{2}}\ln h \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ par croissance comparée.

Par définition de la limite, $\exists h_0 \in]0,1[$, $\forall h \in]0,h_0[$, $\left|\dfrac{\ln h}{h^{-a}}\right| \leqslant \dfrac{1}{h^{\frac{1-a}{2}}}$.

Or $\dfrac{1-a}{2} < 1$ $(-a<1)$, donc par Riemann $\dfrac{1}{h^{\frac{1-a}{2}}}$ intégrable et par majoration $\dfrac{\ln h}{h^{-a}}$ aussi.

Conclusion : φ est intégrable sur $[0,1[$.

Soit $g : [a,+\infty[\times[0,1[\to\mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = (1-t^2)^x = e^{x\ln(1-t^2)}$.

- Pour tout $t\in[0,1[$, la fonction $x\mapsto g(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.
- Pour tout $x\in[a,+\infty[$, la fonction $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,1[$ d'après 1).

  Pour tout $x\in[a,+\infty[$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(1-t^2)(1-t^2)^x$ est continue par morceaux sur $[0,1[$.
- La fonction φ est intégrable sur $[0,1[$ (d'après ci-dessus) et

$$\forall (x,t)\in[a,+\infty[\times[0,1[\qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\ln(1-t^2)|(1-t^2)^a = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{La fonction } \beta \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{ et } \beta'(x) = \int_0^1 \ln(1-t^2)(1-t^2)^x\,\mathrm{d}t.}$$

De plus, comme β est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a\in]-1,+\infty[$, elle est $\mathscr{C}^1$ sur l'union de ces segments :

$$\boxed{\beta \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-1,+\infty[}$$

b) Étudions le signe de β' : $\ln(1-t^2) < 0$ et $(1-t^2)^x > 0$ sur $]0,1[$, donc par croissance de l'intégrale, $\beta'(x) \leqslant 0$.

De plus, comme la fonction intégrée est continue, de signe constant (négatif) et non nulle, l'intégrale ne peut pas être nulle : $\beta'(x)\neq 0$.

Conclusion : $\beta' < 0$ et $\boxed{\beta \text{ est strictement décroissante sur } \mathscr{D}}$

3) (UPS)

a) Soit $T\in[0\ 1[$. Procédons à une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(t) = (1-t^2)^{x+1} \\ v'(t) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) = (x+1)(-2t)(1-t^2)^x \\ v(t) = t, \end{cases}$$

où u,v sont de classe C^1 sur le segment $[0\ T]$. On a :

$$\int_0^T (1-t^2)^{x+1}\,\mathrm{d}t = [(1-t^2)^{x+1}t]_0^T - \int_0^T (x+1)(-2t)(1-t^2)^x t\,\mathrm{d}t = (1-T^2)^{x+1}T + 2(x+1)\int_0^T t^2(1-t^2)^x\,\mathrm{d}t$$

$$= (1-T^2)^{x+1}T + 2(x+1)\Big(-\int_0^T (1-t^2)^{x+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^T (1-t^2)^x\,\mathrm{d}t\Big).$$

On a, puisque $x+1>0$: $(1-T^2)^{x+1} \xrightarrow[T\to 1^-]{} 0$ d'où, en passant aux limites lorsque $T\to 1^-$:

$$\beta(x+1) = 2(x+1)\big(-\beta(x+1)+\beta(x)\big),$$

c'est-à-dire :

$$\underbrace{(2x+3)}_{\neq 0}\beta(x+1) = (2x+2)\beta(x),$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in]-1\ +\infty[,\quad \beta(x+1) = \frac{2x+2}{2x+3}\beta(x)}$$

b) • On a : $\beta(0) = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1.$

• Comme β est continue en 0 (cf. II.2.), on a :

$$\beta(x) = \underbrace{\frac{2x+3}{2x+2}}_{\to+\infty}\underbrace{\beta(x+1)}_{\to 1} \xrightarrow[x\to-1^+]{} +\infty.$$

c) • On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\beta(n) = \frac{2n}{2n+1}\beta(n-1) = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\beta(n-2) = ... = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\beta(0)$$
$$= \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \frac{\big((2n)(2n-2)\cdots 2\big)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

• On déduit de la formule de Stirling :

$$\beta(n) \underset{n\infty}{\sim} \frac{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}2\pi n}{\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}\sqrt{2\pi(2n+1)}} = \frac{2^{2n+1}n^{2n+1}e\pi}{(2n+1)^{2n+1}\sqrt{2\pi(2n+1)}} = \Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^{2n+1}\frac{e\pi}{\sqrt{2\pi(2n+1)}}.$$

On a :

$$\Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^{2n+1} = \Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)^{2n+1}\lim e^{-1},$$

d'où :

$$\beta(n) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{e}\,\frac{e\pi}{\sqrt{2\pi 2n}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

• Il en résulte : $\beta(n) \lim 0$.

• Puisque β est (strictement) décroissante, on a, pour tout $x \in]-1\ +\infty[$:

$$\beta\big(E(x)+1\big) \leqslant \beta(x) \leqslant \beta\big(E(x)\big).$$

D'après ci-dessus, comme $E(x)$ est un entier et que $E(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, on a :

$$\beta\big(E(x)+1\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \beta\big(E(x)\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

d'où, par encadrement :

$$\boxed{\beta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

d) • On a :

$$\beta\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arcsin}\,(t)]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

• On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\beta\Big(-\frac{1}{2}+n\Big) = \frac{2n-1}{2n}\beta\Big(-\frac{1}{2}+n-1\Big) = ... = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-1}\cdots\frac{1}{2}\beta\Big(-\frac{1}{2}\Big)$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{\big((2n)(2n-2)\cdots 2\big)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n-1}(n!)^2}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE