# Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

---

**L'usage des calculatrices est interdit.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

## Exercice 1

On considère les fonctions $f$ et $g$, respectivement définies par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad , \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\,\mathrm{d}t$$

**1)** Monter que, pour tout réel $t$ strictement positif, $\dfrac{|\sin t|}{t} \leqslant 1$.

**2)** Montrer que $f$ et $g$ sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

**3)** Soit $a$ un réel strictement positif. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ et $g$ sur $[a, +\infty[$.

**4)** Pour tout réel $x > 0$, comparer $f'(x)$ et $g(x)$.
(On pensera à remarquer que $g(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \displaystyle\int_0^X \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\,\mathrm{d}t$ afin de pouvoir intégrer par parties).

**5)** Montrer que, pour tout réel strictement positif $x$ :

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

**6)** Montrer que $f$ a une limite nulle lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**7)** Déduire des questions précédentes l'expression de $f(x)$ pour tout réel strictement positif $x$.

**8)** On considère la fonction $h$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{t}\sin t\,\mathrm{d}t$.

**a)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. On notera $\alpha$ sa valeur, et on pourra écrire :

$$h(x) = \alpha - f(x)$$

**b)** On note $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$. Montrer que $\varphi$ est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (que l'on appellera toujours $\varphi$).

**c)** Montrer que, pour tout $x > 0$, $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(u)\sin\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u$.

**d)** En déduire que, pour tout $x > 0$, $h(x) = x + x\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(u)\cos\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u$.

**e)** En déduire que, pour tout $x > 0$, $|h(x)| \leqslant Kx$, où $K \in \mathbb{R}$ est une constante que l'on déterminera.

**f)** Montrer que $h$ est continue en 0. En déduire la valeur de la limite de $f$ en 0.

**9)** Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ ?

## Exercice 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t$.

**1)** Soit $\lambda$ un réel strictement positif. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2} \right) \mathrm{d}u$$

après en avoir justifié l'existence.

**2)** **a)** Pour tous réels $x$ et $t$, calculer le module $|1 - xe^{it}|$ du nombre complexe $1 - xe^{it}$.

**b)** Montrer que si $x$ est un réel différent de 1 et $-1$, alors $1 - 2x\cos(t) + x^2 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

**c)** Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\pi} \ln(1-\cos t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\pi} \ln(1+\cos t)\,\mathrm{d}t$$

**d)** En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t$ converge.

**3)** À l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction $h$ est paire. Déterminer $h(0)$.

**4)** Montrer que la fonction $h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1[$ et donner une expression de $h'$ à l'aide d'une intégrale.

**5)** Montrer que pour tout réel $x \in ]-1, 1[$ et $x \neq 0$, on a les deux égalités

$$\int_0^{\pi} \frac{x - \cos t}{1 - 2x\cos(t) + x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x+1} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 - \lambda}{(u^2+\lambda^2)(u^2+1)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2}\,\mathrm{d}u$$

où l'on a posé $\lambda = \dfrac{1-x}{1+x}$. On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \tan \dfrac{t}{2}$.

**6)** Démontrer que $h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et donner, pour tout $x \in ]-1, 1[$, une expression de $h'(x)$ sans intégrale puis de $h(x)$.

**7)** Pour tout $x \neq 0$, déterminer une relation entre $h(x)$ et $h(1/x)$.

**8)** En déduire la valeur de $h(x)$ pour $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$.

**9)** **a)** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

**b)** En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\pi \ln 2$.

**c)** En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(2 - 2\cos t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(2 + 2\cos t)\,\mathrm{d}t$.

**10)** Expliciter $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, selon les valeurs de $x$.

## Exercice 3

À tout $P \in \mathbb{R}[X]$, nous lui associons la fonction $\widehat{P}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \widehat{P}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \widehat{P}(0) = P(0)$$

**1)** Démontrer que, si $P$ est de degré $n$, $\widehat{P}$ est une fonction polynomiale de degré $n$.

**2)** On note $\psi(P) = \widehat{P}$. Montrer que $\psi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

**3)** Soit $\varphi$ l'application définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = \widehat{P}$. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme. Déterminer sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $E$.

**4)** Notons $P_1 = (X-1)^2$, $P_2 = (X-1)(X+1)$ et $P_3 = (X+1)^2$. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $E$.

**5)** Soit $P \in E$. Exprimer à l'aide de $P(1)$, $P'(1)$ (dérivée de $P$ en 1) et $P(-1)$ les coordonnées de $P$ dans la base $\mathscr{B}'$.

# Exercice 4

On considère la fonction $\beta$ de la variable réelle $x$ définie par $\beta(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x \, \mathrm{d}t$.

**1)** Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de $\beta$.

**2)** **a)** Montrer que $\beta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$ et donner $\beta'(x)$ sous forme intégrale.

**b)** Montrer que $\beta$ est strictement monotone sur $\mathscr{D}$ et préciser son sens de variation.

**3)** **a)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'on a

$$\forall x > -1 \qquad \beta(x+1) = \frac{2x+2}{2x+3}\beta(x)$$

**b)** Calculer $\beta(0)$. En déduire la limite de $\beta(x)$ lorsque $x$ tend vers $-1$ par valeurs supérieures.

**c)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $\beta(n)$ à l'aide de factorielles.

**d)** On admet la formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Déterminer un équivalent de $\beta(n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. En déduire la limite de $\beta(n)$ en $+\infty$, puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \beta(x)$ ($x$ réel).

**e)** Calculer $\beta(-1/2)$. En déduire $\beta(-1/2+n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**FIN DE L'ÉPREUVE**