

Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (D'après Centrale TSI 2012)

Partie 1

1) Soit x un réel strictement positif fixé.

a) L'application $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

Comme $x > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-xt} = 0$ et donc par croissance comparée $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\dfrac{e^{-xt}}{t} = 0$.

Ainsi, par définition de la limite, il existe $A \geqslant 1$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $\left|t^2\dfrac{e^{-xt}}{t}\right| \leqslant 1$, et donc $\left|\dfrac{e^{-xt}}{t}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

Or d'après Riemann $\dfrac{1}{t^2}$ intégrable au voisinage de $+\infty$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc $\boxed{\text{convergente.}}$

b) Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $t \geqslant 1$ donc $0 < \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{1}$, d'où $\boxed{0 \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{t} \leqslant e^{-xt}}$.

c) En intégrant entre 1 et $X \geqslant 1$ l'inégalité précédente, on a

$$0 \leqslant \int_1^X \frac{e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^X e^{-xt}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x}e^{-xt}\right]_1^X = -\frac{1}{x}e^{-xX} + \frac{1}{x}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$ converge d'après 1)a) donc, lorsque $X \to +\infty$, $\boxed{0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}}$

d) Effectuons un développement limité en 0 :

$$\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} = \frac{1 - t + o(t) - (1 - xt)}{t} = \frac{(x-1)t + o(t)}{t} = x - 1 + o(1)$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} = x - 1}$

e) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

<u>$t \to 0^+$</u> : g est prolongeable par continuité en 0^+ d'après d), donc d'intégrale absolument convergente en 0.

<u>$t \to +\infty$</u> : D'après a), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$ est absolument convergente pour $x > 0$ et pour $x = 1$, donc en combinant l'intégrale de g est absolument convergente au voisinage de $+\infty$.

En conclusion, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente.}}$

2) **a)** Soit c un réel strictement positif. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre sur l'intervalle $D = [c, +\infty[$.

Soit $h : [c, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[c, +\infty[$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in [c, +\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après 1)e).

  Pour tout $x \in [c, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ car exponentielle est continue.
- La fonction $\varphi(t) = e^{-ct}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après le critère des exponentielles ($c > 0$) et

$$\forall (x,t) \in [c, +\infty[\times]0, +\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-ct} = \varphi(t)$$

(Il est **fondamental** *que φ ne dépende pas de x. C'est le cœur du théorème. De plus, la majoration doit être vraie « pour tout t dans le domaine d'intégration ».)*

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [c, +\infty[\text{ et } F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t.}$$

b) Pour tout $c \in \mathbb{R}_+^*$, F est $\mathscr{C}^1$ sur $[c, +\infty[$ d'après 2)a). Donc $\boxed{F \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \bigcup_{c \in \mathbb{R}_+^*} [c, +\infty[=]0, +\infty[}$ (on montre cette égalité par double inclusion).

c) Soit $x > 0$. D'après 2)a), $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$

En intégrant, il vient $F(x) = \ln x + C$. Or $F(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{0}{t}\,\mathrm{d}t = 0$ donc $C = 0$. Ainsi, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\boxed{F(x) = \ln x}$

3) Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.

a) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

<u>En $t = 0$</u> : $\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \dfrac{-at + bt + o(t)}{t} \sim b - a$. La fonction est prolongeable par continuité donc intégrable en 0.

<u>En $t \to +\infty$</u> : Pour $t \geqslant 1$, $\left|\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right| \leqslant 2e^{-at}$ qui est intégrable par le critère des exponentielles ($a > 0$). Donc $t \mapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

En conclusion, $\boxed{I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

b) On effectue le changement de variables $u = at$. Pour $a > 0$, $t \mapsto at$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$, avec $\mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t$. Donc

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-b\frac{u}{a}}}{u/a}\,\frac{\mathrm{d}u}{a} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u}\,\mathrm{d}u = F(b/a)$$

Ainsi $\boxed{I(a,b) = F(b/a)}$ puis, d'après 2)c) $\boxed{I(a,b) = F(b/a) = \ln(b/a)}$.

4) **a)** $1 - e^{-t} = 1 - (1 - t + o(t)) = t + o(t) \sim t$. À n fixé on peut prendre la puissance : $\boxed{(1 - e^{-t})^n \sim t^n}$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t}(1-e^{-t})^n$ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0,+\infty[$.

<u>En $t=0$</u> : $\dfrac{e^{-xt}}{t}(1-e^{-t})^n \sim \dfrac{1}{t}(1-e^{-t})^n \sim t^{n-1}$ d'après a) ($x \neq 0$). Or $n \geqslant 1$, donc la fonction est prolongeable par continuité (par 0 ou 1 selon que $n>1$ ou $n=1$) donc intégrable en 0.

<u>En $t \to +\infty$</u> : $\left|\dfrac{e^{-xt}}{t}(1-e^{-t})^n\right| \sim_{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{t}$ qui est intégrable en $+\infty$ d'après 1)a). Donc $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t}(1-e^{-t})^n$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

En conclusion, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}(1-e^{-t})^n \,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

c) *La série géométrique. Fondamental. Regardez le premier exercice de la première feuille de l'année.*

Pour tout réel t strictement positif et tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{-kt} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(-e^{-t}\big)^k 1^{n-k} = (1-e^{-t})^n$$

Par conséquent, en développant,

$$-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1-e^{-kt}) = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{-kt} = -(1-1)^n+(1-e^{-t})^n = (1-e^{-t})^n$$

Conclusion : $\boxed{-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1-e^{-kt}) = (1-e^{-t})^n}$.

d) Soit $x>0$ et $t>0$ fixés. En multipliant par $\dfrac{e^{-xt}}{t}$ la formule précédente, il vient

$$-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{e^{-xt}}{t}(1-e^{-kt}) = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{e^{-xt}-e^{-(k+x)t}}{t}) = \frac{e^{-xt}}{t}(1-e^{-t})^n$$

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $0<x<x+k$ (pour $k=0$, le terme est nul), donc d'après 3)b) les intégrales convergent et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t}(1-e^{-t})^n\mathrm{d}t &= -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-(k+x)t}}{t})\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k I(x,x+k)\\ &= -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k F\Big(\frac{x+k}{x}\Big) = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\big(\ln(x+k)-\ln(x)\big)\end{aligned}$$

Or $-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\ln(x) = (1-1)^n\ln(x) = 0$ donc finalement

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t}(1-e^{-t})^n\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\ln(x+k)}$$

Partie 2

1) *Quand l'énoncé donne une indication, ce n'est pas un piège fourbe. C'est pour aider. Donc quand la question commence par « À l'aide de l'équivalent trouvé en 4)a) », il serait de bon ton de regarder ce qu'on a* trouvé *en 4)a)...*

D'après 4)a), $(1-e^{-t})^n \sim t^n$. Donc par définition de l'équivalence, $\boxed{(1-e^{-t})^n = t^n + o(t^n)}$

2) Comme $e^{-kt} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-kt)^i}{i!} + o((kt)^n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{k^i}{i!} t^i + o(t^n)$ au voisinage de $t = 0$.

$$\begin{aligned}(1-e^{-t})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-e^{-t})^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k e^{-kt} \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{k^i}{i!} t^i \right) + o(t^n)}\end{aligned}$$

3) D'après les questions 1) et 2), $(1-e^{-t})^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{k^i}{i!} \right) t^i + o(t^n) = t^n + o(t^n)$.

Par unicité du développement limité de $(1-e^{-t})^n$ en 0, il vient

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad (-1)^i \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{k^i}{i!} \right) = 0 \qquad \text{et} \qquad (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{k^n}{n!} \right) = 1$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{k^i}{i!} = 0 \text{ pour tout } i \in [\![0, n-1]\!], \text{ et vaut } (-1)^n \text{ pour } i = n.}$

4) Pour tout entier naturel $r \leqslant n-1$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (X+k)^r = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} X^{r-i} k^i = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} X^{r-i} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^i \right)$$

Or $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^i = 0$ pour tout $i \in [\![0, r]\!] \subset [\![0, n-1]\!]$ d'après la question précédente. En conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (X+k)^r = 0}$$

Partie 3

1) a) L'application $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t^r} (1-e^{-t})^n$ est continue donc continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

En $+\infty$, $t^2 \frac{e^{-xt}}{t^r} (1-e^{-t})^n \sim t^{2-r} e^{-xt} \to 0$ car $x > 0$, par croissance comparée.

Donc par définition de la limite, il existe $A \geqslant 1$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant \frac{e^{-xt}}{t^r} (1-e^{-t})^n \leqslant \frac{1}{t^2}$.

Or $1/t^2$ intégrable en $+\infty$ (Riemann, $2 > 1$), donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^r} (1-e^{-t})^n \mathrm{d}t \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$$

b) L'application $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t^r} (1-e^{-t})^n$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Au voisinage de $t = 0$, d'après 1)4)a), $(1-e^{-t})^n \sim t^n$. Ainsi,

$$\frac{e^{-xt}}{t^r} (1-e^{-t})^n \sim \frac{1}{t^{r-n}}$$

D'après Riemann en 0, l'intégrale de $\frac{1}{t^{r-n}}$ converge en 0 si et seulement si $r - n < 1$. Comme ce sont des entiers, cette condition s'écrit $r - n \leqslant 0$, c'est-à-dire $n \geqslant r$.

En conclusion, par équivalence, $\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{1} \frac{e^{-xt}}{t^r} (1-e^{-t})^n \mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } n \geqslant r.}$

2) **a)** Soit c un réel strictement positif. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre sur l'intervalle $D = [c, +\infty[$.

Soit $h : [c, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{t^r}(1-e^{-t})^n$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[c, +\infty[$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in [c, +\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après 1)a) et b).

  Pour tout $x \in [c, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{e^{-xt}}{t^{r-1}}(1-e^{-t})^n$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = \dfrac{e^{-ct}}{t^{r-1}}(1-e^{-t})^n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après 1)a) et b), car $r-1 \leqslant n$ ($\varphi(t) = h_{r-1}(c,t)$) et

$$\forall (x,t) \in [c, +\infty[\times]0, +\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \left(\frac{1}{t^{r-1}}(1-e^{-t})^n\right)e^{-xt} \leqslant \frac{e^{-ct}}{t^{r-1}}(1-e^{-t})^n = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{La fonction } F_r \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [c, +\infty[\text{ et } F_r'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{e^{-xt}}{t^{r-1}}(1-e^{-t})^n \,\mathrm{d}t.}$$

b) Pour tout $c \in \mathbb{R}_+^*$, F_r est $\mathscr{C}^1$ sur $[c, +\infty[$ d'après 2)a). Donc $\boxed{F_r \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \bigcup_{c \in \mathbb{R}_+^*} [c, +\infty[=]0, +\infty[}$

(on montre cette égalité par double inclusion).

Pour $r \leqslant n-1$, on a $\forall x > 0$, $\boxed{F_{r+1}'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{e^{-xt}}{t^{r-1}}(1-e^{-t})^n \,\mathrm{d}t = -F_r(x)}$

3) **a)** Par décroissance de e^{-t}, on a $t \geqslant 0 \Longrightarrow e^{-t} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant 1 - e^{-t}$.

Soit $h(t) = 1 - e^{-t} - t$. Sur $[0, +\infty[$, $h'(t) = e^{-t} - 1 \leqslant 0$ d'après ci-dessus donc par décroissance h, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $h(t) \leqslant h(0) = 0$.

En conclusion, $\boxed{\text{Pour tout } t \geqslant 0, \text{ on a } 0 \leqslant 1 - e^{-t} \leqslant t.}$

b) Soit $x > 0$ fixé. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $\dfrac{e^{-xt}}{t^r} \geqslant 0$, on a l'enchaînement suivant,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant 1 - e^{-t} \leqslant t \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leqslant (1-e^{-t})^n \leqslant t^n \\ &\Longrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{e^{-xt}}{t^r}(1-e^{-t})^n \leqslant t^n \frac{e^{-xt}}{t^r} = e^{-xt}t^{n-r} \end{aligned}$$

Avant d'intégrer sur un intervalle qui n'est pas un segment (i.e. des intégrales impropres), **toujours** *parler de la convergence.*

Les intégrales de $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t^r}(1-e^{-t})^n$ et $t \mapsto e^{-xt}t^{n-r}$ sur $]0, +\infty[$ convergent d'après 1)a) et b), donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant F_r(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1-r}} \int_0^{+\infty} e^{-xt}t^{n-r} \,\mathrm{d}t$$

Posons le changement de variable $u = xt$ (car $x \neq 0$). Alors $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$, et $\begin{array}{ll} t \to 0 & u \to 0 \\ t \to +\infty & u \to +\infty \end{array}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}t^{n-r} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{x}\right)^{n-r}\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x^{n+1-r}} \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{n-r}\mathrm{d}u$$

En conclusion, pour tout $x > 0$, on a : $\boxed{0 \leqslant F_r(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1-r}} \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{n-r}\mathrm{d}u}$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{n-r}du$ est une constante, donc indépendante de x *(les questions de convergence de l'intégrale, i.e. d'existence de cette constante, se sont posées à la question d'avant)*.

Ainsi, comme $n+1-r>0$, par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F_r(x)=0}$

4) Soit $x>0$.

$$\begin{aligned} G'_{r+1}(x) &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\Big(r(x+k)^{r-1}\ln(x+k)+(x+k)^{r-1}\Big) \\ &= -G_r(x)+\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^{r-1} \end{aligned}$$

Or d'après (1), $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^{r-1}=0$ pour tout $r\in[\![0,n-1]\!]$. Donc finalement $\boxed{G'_{r+1}(x)=-G_r(x)}$

5) Soit $x>0$. D'après 1)4)d), $\displaystyle F_1(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t^1}(1-e^{-t})^n\,\mathrm{d}t=-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\ln(x+k)$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_r :\quad F_r=G_r$$

est vraie pour tout $r\in[\![1,n]\!]$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $\displaystyle G_1(x)=G_r(x)=\frac{(-1)^1}{(1-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^{1-1}\ln(x+k)=F_1(x)$. $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_r\Longrightarrow\mathcal{H}_{r+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_r$ vraie, pour $r\in[\![1,n-1]\!]$: $F_r=G_r$.
D'après 4), $G'_{r+1}=G_r$. De plus, d'après 2)b), $F'_{r+1}=F_r$. Donc $G'_{r+1}=G_r=F_r=F'_{r+1}$, et en intégrant
$$G_{r+1}=F_{r+1}+K$$
Or on a supposé que $\lim\limits_{x\to+\infty}G_r(x)=0$, et en 3)c) nous avons prouvé que $\lim\limits_{x\to+\infty}F_r(x)=0$. Donc en passant à la limite en $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus, on trouve $0=0+K$ et donc $K=0$.
Donc $\mathcal{H}_{r+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall r\in[\![1,n]\!]\qquad F_r=G_r}$

6) **a)** Comme $x>0$,

$$\begin{aligned} G_{r+1}(x) &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r\ln\Big(x\Big(1+\frac{k}{x}\Big)\Big) \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r\Big(\ln(x)+\ln\Big(1+\frac{k}{x}\Big)\Big) \\ &= \ln(x)\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r+\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r\ln\Big(1+\frac{k}{x}\Big) \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r\ln\Big(1+\frac{k}{x}\Big) \qquad \text{(d'après (1))} \end{aligned}$$

b) $\boxed{\ln(1+u)=\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\frac{u^j}{j}+o(u^r)}$ *(J'ai vu des erreurs. C'est MAL. Vous devez soit le savoir, soit savoir le retrouver (au brouillon)* **très vite** *et – évidemment – sans erreurs.... Aucune preuve n'était demandée ici.)*

c) $\ln(1+\frac{k}{x}) = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\frac{k^j}{jx^j} + o\Big(\frac{1}{x^r}\Big)$, puis on remplace dans la formule obtenue en 6)a)

$$\begin{aligned} G_{r+1}(x) &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r \ln\left(1+\frac{k}{x}\right) \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r\left(\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\frac{k^j}{jx^j}+o\Big(\frac{1}{x^r}\Big)\right) \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\left[(x+k)^r\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}k^j}{jx^j}\right]+o\Big(\frac{(x+k)^r}{x^r}\Big)\right) \end{aligned}$$

Or lorsque $x \to +\infty$, $(x+k) \sim x$ donc $(x+k)^r \sim x^r$. Ainsi, le $o\Big(\frac{(x+k)^r}{x^r}\Big)$ se transforme en $o\Big(\frac{x^r}{x^r}\Big)$ et donc en $o(1)$, que l'on peut sortir de la somme (il n'y a plus de x, que des constantes et une somme finie) et noter $\varepsilon(x)$ (qui admet pour limite 0 lorsque $x \to +\infty$) :

$$\boxed{G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}k^j}{jx^j}\right)+\varepsilon(x)}$$

Développons (avec courage) le $(x+k)^r$:

$$\begin{aligned} G_{r+1}(x) &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}k^{r-i}x^i\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}k^j}{j}x^{-j}+\varepsilon(x) \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{r}{i}k^{r-i}\frac{(-1)^{j-1}k^j}{j}\right)x^{i-j}+\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Effectuons le regroupement suivant dans les sommes : $s = i-j$, variant de $s=-r$ à $s=r-1$.

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{s=-r}^{r-1}\left(\sum_{\substack{i:=0,\,j:=1\\ i-j=s}}^{i:=r,j:=r}\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{r}{i}k^{r-i}\frac{(-1)^{j-1}k^j}{j}\right)x^s+\varepsilon(x)$$

Ainsi, $\boxed{G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{s=-r}^{r-1}A_s x^s+\varepsilon(x)}$

d) Étudions $A_s = \sum_{\substack{i:=0,\,j:=1\\ i-j=s}}^{i:=r,j:=r}\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{r}{i}k^{r-i}\frac{(-1)^{j-1}k^j}{j}$ pour s vérifiant $0 \leqslant s \leqslant r-1$.

En regroupant les termes contenant du k, on se ramène à la formule (1) :

$$A_s = \sum_{\substack{i:=0,\,j:=1\\ i-j=s}}^{i:=r,j:=r}\binom{r}{i}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^{r-s}\right)$$

Or $1 \leqslant r-s \leqslant r \leqslant n-1$ donc d'après (1), $\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^{r-s}\right) = 0$ et donc $\boxed{A_s = 0}$.

e) D'après c), pour $1 \leqslant r \leqslant n-1$, $G_{r+1}(x) = \dfrac{(-1)^{r+1}}{r!} \displaystyle\sum_{s=-r}^{-1} A_s x^s + \varepsilon(x)$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} G_{r+1}(x) = 0$. De plus $G_1 = F_1$ donc $\lim\limits_{+\infty} G_1 = 0$.

En conclusion, $\boxed{\text{Pour tout entier } r \text{ vérifiant } 1 \leqslant r \leqslant n, \text{ on a } \lim\limits_{x\to+\infty} G_r(x) = 0.}$

On a donc entièrement prouvé la conjecture du 5), et une écriture des fonctions F_r sans intégrales.

Exercice 2 (D'après CCP PC 2012)

1) L'application φ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

<u>En $u = 0$</u> : $\varphi(u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{u + o(u)} \sim \dfrac{1}{u^{2-\alpha}}$. Par Riemann, $\dfrac{1}{u^{2-\alpha}}$ est intégrable en 0 si et seulement si $2-\alpha < 1$, c'est-à-dire $a > 1$, ce qui est le cas. Donc φ intégrable en 0.

<u>En $u \to +\infty$</u> : $\varphi(u) \sim u^{\alpha-1}e^{-u}$, et on procède comme à la question 1)a) de l'exercice 1, en comparant à $1/u^2$. φ est intégrable en $+\infty$.

Finalement, $\boxed{\text{L'application } \varphi : u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1} \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.}$

2) Soit $h :]-\infty, 1] \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$.

Il faut enlever $u = 0$, sinon il y a un problème lorsque $x = 1$ – ça ne change pas les bornes de l'intégrale.

- $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto h(x, u)$ est définie *(c'est là qu'est le problème, ici)* et continue sur $]-\infty, 1]$.
- $\forall x \in]-\infty, 1]$, la fonction $u \mapsto h(x, u)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1} = h(1, u)$. La fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}_+^*$ d'après 1), et, par décroissance de $x \mapsto 1/(e^u - x)$ sur $]-\infty, 1]$,
  (Oh oh, à la question 1) on nous donne une fonction φ. Non, ce n'est pas une fourberie de l'énoncé, là non plus. C'est la première fonction à essayer pour le rôle de la fonction... φ dans le théorème.)

$$\forall (x, u) \in]-\infty, 1] \times \mathbb{R}_+, \qquad |h(x, u)| = \left|\frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\right| \leqslant \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1} = \varphi(u)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $\boxed{K_\alpha \text{ est définie et continue sur }]-\infty, 1]}$

3) Appliquons le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre sur l'intervalle $D =]-\infty, 1]$. Soit $h :]-\infty, 1] \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ comme à la question précédente.

- Pour tout $u \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x, u)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1]$ car $x \mapsto 1/(x - K)$ l'est.
- Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, la fonction $u \mapsto h(x, u)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après 2).
  Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, la fonction $u \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Soit $\psi(u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - 1)^2} = h(u, 1)$. La fonction ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$:
  - En $+\infty$, $\psi(u) \sim u^{\alpha-1}e^{-2u}$ est intégrable en comparant à $1/u^2$.
  - En 0, $\psi(u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{(u + o(u))^2} \sim \dfrac{1}{u^{3-\alpha}}$ qui est intégrable d'après Riemann car $\alpha > 2$ dans cette question.

  De plus nous avons,

$$\forall (x, u) \in]-\infty, 1] \times]0, +\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, u)\right| \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2} \leqslant \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - 1)^2} = \psi(u)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{La fonction } K_\alpha \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-\infty, 1] \text{ et } K'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}\, du.}$$

4) Appliquons le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre sur l'intervalle $D = [a, b]$. Soit h comme à la question précédente.

- Les deux premiers points ont été vérifié à la question précédente : rien n'a changé ($\alpha > 2$ n'intervenait pas là).
- Soit $\psi(u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - b)^2} = h(u, b)$. La fonction ψ est définie et continue sur $[0, +\infty[$, intégrable en $+\infty$ pour les mêmes raisons que φ. De plus nous avons,

$$\forall (x, u) \in [a, b] \times]0, +\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, u)\right| \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2} \leqslant \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - b)^2} = \psi(u)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{La fonction } K_\alpha \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a, b] \text{ et } K'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2} \, du.}$$

La fonction K_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a, b]$ avec $a < b < 1$, donc sur $\displaystyle\bigcup_{a<b<1} [a, b] =] - \infty, 1[$.

5) Soit $x \leqslant 1$. On effectue le changement de variable $u = -\ln t$, la fonction $-\ln$ étant $\mathscr{C}^1$ et bijective de $]0, 1[$ dans $]0, +\infty[$.

$$K_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{(-\ln t)^{\alpha-1}}{e^{-\ln t} - x} \frac{dt}{|-t|} = \int_0^1 \frac{(-\ln t)^{\alpha-1}}{1 - xt} \, dt$$

Toujours au moins 1 étape, surtout pour un « Montrer que »

6) cf. exercice d'intégration sur Γ. On pouvait remarquer que $G_\alpha = K_\alpha(0)$, donc G_α existe.

7) Les fonctions K_α et $x \mapsto x$ sont définies et continues sur $] - \infty, 1]$, et $\mathscr{C}^1$ sur $] - \infty, 1[$, donc L_α aussi comme produit.

8) Soit $x \in] - \infty, 1]$.

$$\begin{aligned}
L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) &= \frac{x}{G_\alpha} K_\alpha(x) + \frac{-x}{G_\alpha} K_\alpha(-x) = \frac{x}{G_\alpha} \left(\int_0^1 \frac{(-\ln t)^{\alpha-1}}{1 - xt} \, dt - \int_0^1 \frac{(-\ln t)^{\alpha-1}}{1 + xt} \, dt \right) \\
&= \frac{x}{G_\alpha} \int_0^1 (-\ln t)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1 - xt} - \frac{1}{1 + xt} \right) dt = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^1 (-\ln t)^{\alpha-1} \left(\frac{2xt}{1 - x^2 t^2} \right) dt \\
&= \frac{x^2}{G_\alpha} \int_0^1 \left(\frac{-\ln(t^2)}{2} \right)^{\alpha-1} \frac{2t}{1 - x^2 t^2} \, dt \\
&= 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2)
\end{aligned}$$

Après changement de variable $u = t^2$ ($du = 2t \, dt$), qui laisse inchangé les bornes d'intégration.

9) A cette question, il suffit de minorer $e^u - z$ pour $z \in \mathbb{C} \backslash]1, +\infty[$ fixé. Soit $z = x + iy$. Pour tout $u > 0$,

$$|e^u - z|^2 = (e^u - x)^2 + y^2 \geqslant (e^u - x)^2 \geqslant (e^u - 1)^2$$

Donc $\left| \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - z} \right| \leqslant \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1} = \varphi(u)$ et comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale définissant $L_\alpha(z)$ est absolument convergente donc convergente.

Soit $z \in \mathbb{C} \backslash]1, +\infty[$ fixé. $L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = \dfrac{z}{G_\alpha}(K_\alpha(z) - K_\alpha(-z))$ et

$$K_\alpha(z) - K_\alpha(-z) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}(e^u + z - e^u + z)}{(e^u - z)(e^u + z)} \, du = 2z \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^{2u} - z^2} \, du$$

On effectue le changement de variable $t = 2u$, et il vient

$$K_\alpha(z) - K_\alpha(-z) = 2z \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}} \frac{1}{e^t - z^2} \frac{du}{2} = 2^{1-\alpha} z K_\alpha(z^2)$$

En conclusion, $\boxed{L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2)}$