

Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (D'après Centrale TSI 2012)

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

1) Soit x un réel strictement positif fixé.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{t} \leqslant e^{-xt}$.

c) En déduire que $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}$

d) Montrer que la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$, admet une limite quand $t \to 0^+$, dont on donnera la valeur.

e) Déduire de ce qui précède que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

2) On désigne désormais par F la fonction qui à $x > 0$ associe $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$.

a) Soit c un réel strictement positif. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[c, +\infty[$ et donner l'expression de $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

b) En déduire que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c) Calculer $F'(x)$ puis $F(x)$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

3) Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.

a) Montrer que l'intégrale $I(a, b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que $I(a, b) = F(b/a)$. En déduire la valeur de $I(a, b)$.

4) Dans cette question, on considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n\mathrm{d}t$, dans laquelle x est un réel strictement positif et n un entier supérieur ou égal à 1.

a) À l'aide d'un équivalent de $1 - e^{-t}$, déterminer un équivalent de $(1 - e^{-t})^n$ en $t = 0$.

b) Montrer que l'intégrale est convergente.

c) Pour tout réel t strictement positif et tout entier n supérieur ou égal à 1, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{-kt}$ puis en déduire que $\displaystyle -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1-e^{-kt}) = (1-e^{-t})^n$

d) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t}(1-e^{-t})^n\mathrm{d}t$ à l'aide de F.

Partie 2

Résultats intermédiaires nécessaires pour certaines questions de la partie 3. On pourra au besoin admettre les résultats. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1) À l'aide de l'équivalent trouvé en 4)a), déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de $(1-e^{-t})^n$.

2) En développant $(1-e^{-t})^n$ puis en utilisant un développement limité adapté montrer que

$$(1-e^{-t})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{k^i}{i!}t^i + o(t^n)\right)$$

3) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{k^i}{i!} = 0$ pour tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$, et vaut 1 pour $i = n$.

4) Montrer que pour tout entier naturel $r \leqslant n-1$,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(X+k)^r = 0 \tag{1}$$

Partie 3

Dans toute cette partie, n et r désignent des entiers supérieurs ou égaux à 1 et x un réel strictement positif.

1) a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t^r}(1-e^{-t})^n\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1}\frac{e^{-xt}}{t^r}(1-e^{-t})^n\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $n \geqslant r$.

2) Désormais, on suppose la condition $1 \leqslant r \leqslant n$ vérifiée. On définit la fonction F_r qui à $x > 0$ associe :

$$F_r(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t^r}(1-e^{-t})^n\mathrm{d}t$$

a) Soit c un réel strictement positif.
Montrer que la fonction F_r est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[c,+\infty[$.

b) En déduire que F_r est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Montrer que si $r \leqslant n-1$, on a

$$\forall x > 0,\ F'_{r+1}(x) = -F_r(x)$$

3) a) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant 1-e^{-t} \leqslant t$.

b) En déduire, à l'aide d'un changement de variable, que, pour tout $x > 0$, on a :

$$0 \leqslant F_r(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1-r}}\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{n-r}\mathrm{d}u$$

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F_r(x) = 0$.

4) On définit la fonction G_r qui, à $x > 0$, associe :

$$G_r(x) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^{r-1}\ln(x+k)$$

On suppose dans cette question que $1 \leqslant r \leqslant n-1$.
Montrer que $\forall x > 0,\ G'_{r+1}(x) = -G_r(x)$.

5) Dans cette question, on utilisera le résultat $\lim\limits_{x\to+\infty} G_r(x) = 0$ qu'on admet pour l'instant.
Après avoir rappelé à l'aide de la partie 1 l'expression de F_1 à l'aide de fonctions usuelles, montrer par récurrence sur l'entier r variant de 1 à n, qu'on a : $\forall x > 0,\ F_r(x) = G_r(x)$.

6) Le but de cette question est d'établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} G_r(x) = 0$. On utilisera l'égalité (1) obtenue à la partie 2.

a) Montrer que, pour tout entier r vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n-1$

$$\forall x > 0, \quad G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r \ln\left(1+\frac{k}{x}\right)$$

b) Rappeler le développement limité de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ à l'ordre r lorsque u tend vers 0.

c) En utilisant ce développement limité pour la fonction $x \mapsto \ln\left(1+\frac{k}{x}\right)$ lorsque $x \to +\infty$, montrer que :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}k^j}{jx^j}\right) + \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ désigne une fonction admettant pour limite 0 lorsque $x \to +\infty$.
Vérifier qu'il existe des constantes A_s, où s est un entier relatif compris entre $-r$ et $r-1$, telles que :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{s=-r}^{r-1} A_s x^s + \varepsilon(x) \qquad \text{quand } x \to +\infty$$

d) Montrer que, pour tout entier s vérifiant $0 \leqslant s \leqslant r-1$, la constante A_s est nulle.

e) En déduire que, pour tout entier r vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} G_r(x) = 0$.

Exercice 2 (D'après CCP PC 2012)

Dans tout cet exercice, α est un réel strictement supérieur à 1. On pose

$$K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad G_\alpha = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que l'application $\varphi : u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) Montrer que l'application K_α est définie et continue sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.

3) Dans cette question on suppose que $\alpha > 2$.
Montrer que la fonction K_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-\infty,1]$.

4) On revient au cas général où $\alpha > 1$. Montrer que la fonction K_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b]$ avec $a < b < 1$, puis sur l'intervalle $]-\infty,1[$.

5) Montrer que pour tout réel $x \leqslant 1$, on a $K_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln t)^{\alpha-1}}{1-xt}\,\mathrm{d}t$

6) Prouver l'existence de G_α et justifier que $G_\alpha > 0$.

7) Pour tout $x \in]-\infty,1]$, on pose $L_\alpha(x) = \dfrac{x}{G_\alpha}K_\alpha(x)$.
Vérifier que L_α est définie et continue sur $]-\infty,1]$ et $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.

8) Montrer que pour tout $x \in]-\infty,1]$,

$$L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = 2^{1-\alpha}L_\alpha(x^2)$$

9) Montrer que L_α est prolongeable à $\mathbb{C}\backslash]1,+\infty[$ par

$$L_\alpha(z) = \frac{z}{G_\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{e^u-z}\,\mathrm{d}u$$

Et que l'on a toujours $L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha}L_\alpha(z^2)$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash]1,+\infty[$.

FIN DE L'ÉPREUVE