Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (CAPES 2009, partie I)

A. Intégrales de Wallis *cette partie est extrêmement classique, donc à connaître.*

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Soit $n \geqslant 0$. On effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$.
Donc $\cos(t) = \cos(\pi/2 - u) = \sin(u)$ et $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$.

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n u(-1)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \,\mathrm{d}u$$

Remarque : t est une variable *muette*, comme k dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$. Elle n'existe qu'entre $\displaystyle\int$ et $\mathrm{d}t$.

Ainsi on peut réutiliser cette variable un peu plus loin : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$

Conclusion : $\boxed{W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t}$

b) $\boxed{W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n t \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$.
Supposons que $W_n = 0$. Puisque $t \mapsto \cos^n t$ est continue, alors $\cos^n t = 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, ce qui est absurde (par exemple $\cos 0 = 1$).
Ainsi, $\boxed{W_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

c) Soit $n \geqslant 2$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) \times (\cos^{n-1} t) \,\mathrm{d}t \\
&= \Big[(\sin t) \times (\cos^{n-1} t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) \Big(-(n-1)(\sin t)(\cos^{n-2} t)\Big) \,\mathrm{d}t \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(\cos^{n-2} t) \,\mathrm{d}t = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t \,\mathrm{d}t \\
&= (n-1) W_{n-2} - (n-1) W_n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\boxed{nW_n = (n-1)W_{n-2}.}$

d) Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = nW_nW_{n-1}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = (nW_n)W_{n-1} = (n-1)W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = u_{n-1}$$

La suite $(u_n)_n$ est donc géométrique de raison 1 et de premier terme $u_1 = W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $\boxed{\text{La suite } u_n = nW_nW_{n-1} \text{ est constante de valeur } \dfrac{\pi}{2}.}$

2) **a)** Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $\cos^n t \geqslant 0$ et

$$0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

En intégrant cet encadrement, il vient $W_{n+1} \leqslant W_n$, c'est-à-dire $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$
Soit $n \geqslant 2$. D'après 1)c), $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. Ainsi, puisque (W_n) est décroissante,

$$\frac{n-1}{n} W_{n-1} \leqslant \frac{n-1}{n} W_{n-2} = W_n \leqslant W_{n-1}$$

Puisque $W_k > 0$ d'après 1)b), il reste à diviser par W_{n-1} et constater que l'inégalité est vraie en $n = 1$: $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ \frac{n-1}{n} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1.}$

b) Rappel : Pour des suites non nulles au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

D'après 1)d), $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $\frac{1}{W_{n-1}} = \frac{2}{\pi} nW_n$ et l'encadrement de la question 2)a) s'écrit :

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{2}{\pi} nW_n^2 \leqslant 1$$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi} nW_n^2 = 1$, c'est-à-dire $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et, comme $W_n > 0$,

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

B. Formule de Stirling

1) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} \frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} = \frac{n^n\sqrt{n}}{(n+1)^n\sqrt{n+1}} e = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e$$

Donc $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e}$

b) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$, d'après 1)a)

$$v_n = \ln\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} e\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$$

Finalement : $\boxed{v_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1}$

Comme on ne précise pas la formule à obtenir, du moment que vous avez simplifié les factorielles et un peu débroussaillé le reste, ça va. Le but est de faciliter l'obtention du DL à la question suivante.

c) Comme le développement de $\ln(1-u)$ en 0 est $\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, il vient :

$$\begin{aligned}
v_n &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1 \\
&= -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{12n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)}$

d) D'après la question précédente, $|v_n| \sim \dfrac{1}{12}.\dfrac{1}{n^2}$.

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).

Ainsi, par équivalent, la série $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ est convergente}}$

e) La série $\sum v_n$ est télescopique : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} (\ln u_k - \ln u_{k-1}) = \ln u_n - \ln u_1 = (\ln u_n) - 1.$

Or cette série converge, donc $\boxed{(\ln u_n)_n \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}}$

Par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{\text{la suite } u_n = e^{\ln(u_n)} \text{ converge donc aussi}}$, et sa limite est $K = e^\ell > 0$.

Comme $K > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = K$ peut s'écrire $u_n \sim K$, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim K$$

La compatibilité des équivalent avec le produit nous donne

$$\boxed{n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$$

2) **a)** Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(p): \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ D'après 1)b), $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{(2^0 0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie : $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} \qquad\qquad \text{(d'après 1)c))} \\ &= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2(p+1))^2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall p \geqslant 0 \qquad W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}}$

D'après 1)d), pour tout $p \geqslant 0$, $W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2p+1)W_{2p}}$. Ainsi

$$W_{2p+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p+1} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}\frac{2}{\pi} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

b) D'après B.1)e),

$$p! \sim Kp^p e^{-p}\sqrt{p} \qquad \text{et} \qquad (2p)! \sim K2p^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}$$

Donc d'après B.2)a)

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}}{(2^p K p^p e^{-p}\sqrt{p})^2}\frac{\pi}{2} = \frac{K}{K^2} \times \frac{2^{2p}}{2^{2p}} \times \frac{p^{2p+1/2}}{p^{2p+1}} \times \frac{e^{-2p}}{e^{-2p}} \times \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

c) D'après B.2)b), $W_{2p} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$. De plus, d'après A.2)b), $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$.

Donc, par transitivité, $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, et ainsi $\boxed{K = \sqrt{2\pi}}$

En conclusion,

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

C'est ce qu'on appelle la formule de Stirling.

Exercice 2 (PT 2014, partie II)

1) Continuité, dérivabilité :

La fonction g est continue et dérivable sur $]0,1]$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1]$.

En 0, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 = g(0)$, donc g est continue en 0.

De plus $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$

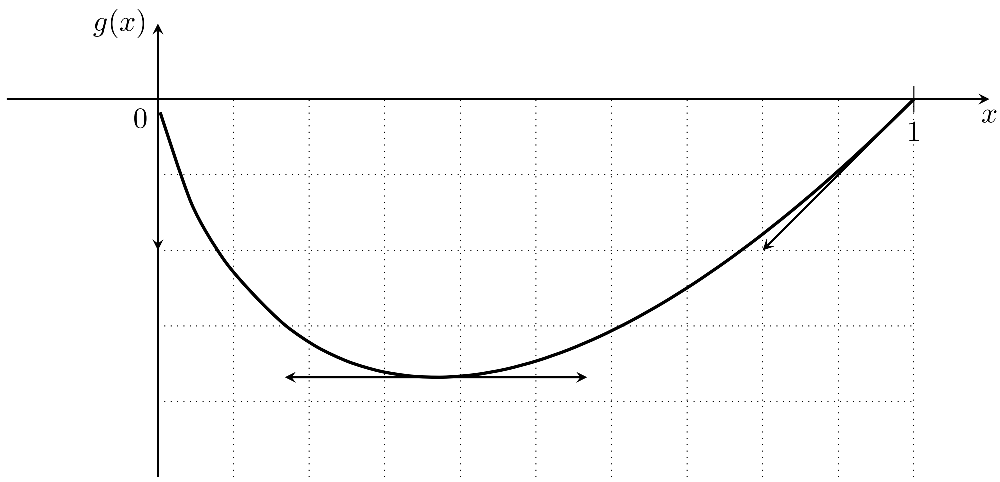
En conclusion, $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est continue sur } [0,1], \text{ dérivable sur }]0,1] \text{ mais pas en } 0.}$

De plus, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une tangente verticale en 0.

Variations : Pour tout $x \in]0,1]$, $g'(x) = (\ln x) + 1$.

x	0		e^{-1}		1
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	1
g	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0

Pour vérifier vos calculs, par exemple le signe de la dérivée : tester quelques valeurs, par exemple ici $x = 1$ (qui sert pour tracer la courbe, en plus).



2) D'après le tableau de variation précédent, $\displaystyle\inf_{x\in[0,1]} g(x) = -e^{-1}$ et $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]} g(x) = 0$.

Donc $\boxed{M = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |g(x)| \text{ existe et } M = \max\left(\left|\inf_{x\in[0,1]} g(x)\right|, \left|\sup_{x\in[0,1]} g(x)\right|\right) = e^{-1}}$

Si on ne nous demandais pas la valeur du maximum, nous aurions pu nous contenter d'appliquer le théorème « $|g|$ continue sur le segment $[0,1]$ donc est bornée et atteint ses bornes ».

3) Comme g est décroissante sur $[0, e^{-1}]$, $-g$ est croissante sur cet intervalle.

Montrons que, sur $]0, e^{-1}]$, $x \leqslant -g(x)$:

Soit $h(x) = x + g(x)$, h est dérivable sur $]0,1]$ d'après 1) et $h'(x) = 1 + g'(x) = 2 + \ln x$. D'où le tableau

- $\lim\limits_{0^+} h = 0$
- $h(e^{-1}) = 0$

x	0		e^{-2}		e^{-1}
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	1
h	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Donc $\forall x \in]0, e^{-1}]$, $h(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant -g(x)$.
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: D'après ci-dessus, $x \leqslant -g(x)$ sur $]0, e^{-1}]$ donc en particulier pour t_0. Ainsi $t_0 \leqslant -g(t_0) = t_1$. De plus, d'après le tableau de variation de g, $\forall x \in [0,1]$, $-g(x) \leqslant e^{-1}$. Donc $t_1 \leqslant e^{-1}$. Finalement : $t_0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant e^{-1}$, et $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie : $t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad -g(t_0) \leqslant -g(t_n) \leqslant -g(t_{n+1}) \leqslant -g(e^{-1}) \quad &&\text{(en appliquant $-g$, croissante sur $]0, e^{-1}]$)}\\
&\Longrightarrow \quad t_1 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_{n+2} \leqslant e^{-1} &&\\
&\Longrightarrow \quad t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_{n+2} \leqslant e^{-1} &&(\mathcal{H}_0)
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}}$

4) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, avec $|f'| \leqslant M$ sur I. Alors

$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2 \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|}$$

5) La fonction g' est dérivable sur $I = [t_0, e^{-1}] \subset \mathbb{R}_+^*$, et $g''(x) = \dfrac{1}{x}$. De plus, sur I, $|g''| \leqslant \dfrac{1}{t_0}$.
Ainsi, pour tout réel $x \in [t_0, e^{-1}]$, l'inégalité des accroissements finis pour g' entre x et e^{-1} s'écrit :

$$\left| g'(e^{-1}) - g'(x) \right| \leqslant \frac{1}{t_0} \left| e^{-1} - x \right|$$

Or $g'(e^{-1}) = 0$ et $\left| e^{-1} - x \right| = e^{-1} - x \geqslant 0$, donc en enlevant les valeurs absolues :

$$-\frac{1}{t_0}\left(e^{-1} - x\right) \leqslant -g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}\left(e^{-1} - x\right)$$

D'après le tableau de variation du 1), $g' \leqslant 0$ sur I, donc finalement

$$\boxed{0 \leqslant -g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1} - x)}$$

Puis en intégrant entre x et e^{-1} *(attention à l'ordre des bornes : $x \leqslant e^{-1}$)*

$$0 \leqslant -g(e^{-1}) + g(x) = \int_x^{e^{-1}} -g'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{e^{-1}} \frac{1}{t_0}(e^{-1} - t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_0}\left[\frac{(e^{-1} - t)^2}{2}\right]_x^{e^{-1}} = \frac{(e^{-1} - x)^2}{2t_0}$$

Donc, en prenant des valeurs absolues :

$$\boxed{|g(x) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}}$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 4), $t_n \in I = [t_0, e^{-1}]$. Donc, d'après 5), avec $x = t_n$,

$$|t_{n+1} - e^{-1}| = |g(t_n) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|t_n - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad |t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est l'inégalité précédente pour $n = 0$ (un carré est toujours positif).
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après ci-dessus,

$$|t_{n+2} - e^{-1}| \leqslant \frac{(t_{n+1} - e^{-1})^2}{2t_0}$$

Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$|t_{n+2} - e^{-1}| \leqslant \frac{1}{2t_0}\left(2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}\right)^2 = \frac{(2t_0)^2}{2t_0}\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n \times 2} = 2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^{n+1}}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad |t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}}$

7) Comme $t_0 \in \left]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$, $|t_0 - e^{-1}| \leqslant \frac{2}{3}e^{-1} \leqslant e^{-1} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n} = 0$.

D'après 6), par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |t_n - e^{-1}|$ existe et égal 0.

En conclusion $\boxed{\text{La suite } (t_n)_n \text{ converge vers } e^{-1}}$

Exercice 3 (PT 2014, partie III)

1) Dans les conditions posées par l'énoncé :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$$

Les bornes du $\sum$ peuvent être décalées d'un nombre de termes constant par rapport à n sans changer le résultat, on peut par exemple sommer de 1 à n ou de 0 à n au lieu de 0 à $n-1$ ...

2) En prenant $a = 0$, $b = 1$ et $\varphi : t \mapsto \ln(1+t)$, le résultat de la question précédente donne :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = [(1+t)\ln(1+t) - (1+t)]_0^1 = 2\ln(2) - 1$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = 2\ln(2) - 1}$$

3) Notons $x_n = \left(\frac{4^n n^n n!}{(2n)!}\right)^{1/n}$. Et calculons :

$$\begin{aligned}
\ln(x_n) &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}4nk}{\prod_{k=1}^{2n}k}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(4nk)-\sum_{k=1}^{2n}\ln(k)\right)\\
&= 2\ln(2)+\ln(n)+\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\sum_{k=1}^{2n}\ln(k)\right)\\
&= 2\ln(2)+\ln(n)-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k)\right)\\
&= 2\ln(2)+\ln(n)-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k+n)\right)\\
&= 2\ln(2)-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+n)-\ln(n))\right)\\
&= 2\ln(2)-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right)
\end{aligned}$$

D'après la question précédente $(\ln(x_n))$ tend vers 1 et donc, comme la fonction exponentielle est continue, (x_n) tend vers e.
Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4^n n^n n!}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{n}}=e}$$

Exercice 4 (E3A MP 2014, Exercice II)

On introduit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

1) Variations de $(u_n)_n$:
Soit $n\in\mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale *(pas vraiment nécessaire, c'est plus pour meubler)*,

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\underbrace{\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}}_{\geqslant 0}\underbrace{(x-1)}_{\leqslant 0}\,\mathrm{d}x$$

Donc, par croissance de l'intégrale, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$.
Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ est décroissante.}}$

Limite de $(u_n)_n$:
Sur $[0,1]$, $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ est positive, décroissante, majorée par 1, donc

$$0\leqslant u_n\leqslant\left(\sup_{x\in[0,1]}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Donc, par encadrement, $\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ est convergente vers } 0}$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. Effectuons une intégration par partie :

$$(n+1)u_n=\Big[(1+x)^{-1/2}x^{n+1}\Big]_0^1-\int_0^1-\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2-1}x^{n+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x$$

3) La suite $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x$ converge vers 0 par encadrement :

$$0 \leqslant \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{(\sqrt{1+x})^3}}_{0\leqslant\ .\ \leqslant 1} x^{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent l'égalité du 2) s'écrit :

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1)$$

En divisant par n et en passant aux équivalents, il vient

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}}$$

4) Effectuons une intégration par parties dans l'égalité obtenue au 2) :

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)u_n &= \frac{(n+2)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(n+2)x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(n+2)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left[(1+x)^{-3/2}x^{n+2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 -\frac{3}{2}(1+x)^{-5/2}x^{n+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \boxed{(n+2)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \alpha_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \text{ et } \alpha_3 = \frac{3}{4}}$

5) De même qu'en 3) et en 1), $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,\mathrm{d}x = o(1)$.

En divisant par $(n+1)(n+2)$ dans l'égalité obtenue au 4), il vient :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

$$\begin{array}{lrcl}\text{Or} & \dfrac{1}{n+1} &=& \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\right) = \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \\ \text{Et} & \dfrac{1}{n^2+3n+2} &=& \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{1+\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}\right) = \dfrac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right) = \dfrac{1}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \\ \text{D'où} & u_n &=& \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\right) + \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\right)+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \\ & &=& \boxed{\dfrac{1}{n\sqrt{2}} + \Big(\dfrac{1}{4\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\dfrac{1}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)}\end{array}$$

D'où $\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \beta = -\frac{3}{4\sqrt{2}}}$

6) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : v_n = \sum_{p=1}^{k} \frac{\alpha_p}{(n+1)\dots(n+p)} + (-1)^k \int_0^1 g^{(k)}(x)\frac{x^{n+k}}{(n+1)\dots(n+k)}\,\mathrm{d}x$$

où $\alpha_p = (-1)^{p-1}g^{(p-1)}(1)$, est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: La forumle ci-dessus avec $k=0$ nous donne :

$$v_n = \int_0^1 x^n g(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\sum_{p=1}^{0} \frac{\alpha_p}{(n+1)\dots(n+p)}}_{\text{somme vide : =0}} + (-1)^0 \int_0^1 x^{n+0} g^{(0)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc $\mathcal{H}_0$ vraie.

- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie et effectuons une intégration par partie.

$$\begin{aligned}(-1)^k \int_0^1 g^{(k)}(x) \frac{x^{n+k}}{(n+1)\dots(n+k)}\,\mathrm{d}x &= \left[(-1)^k g^{(k)}(x) \frac{x^{n+k+1}}{(n+1)\dots(n+k)(n+k+1)}\right]_0^1 \\ &\quad -(-1)^k \int_0^1 g^{(k+1)}(x) \frac{x^{n+k+1}}{(n+1)\dots(n+k+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^k g^{(k)}(1) \frac{1}{(n+1)\dots(n+k)(n+k+1)} \\ &\quad +(-1)^{k+1} \int_0^1 g^{(k+1)}(x) \frac{x^{n+k+1}}{(n+1)\dots(n+k+1)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Donc

$$v_n = \sum_{p=1}^{k+1} \frac{\alpha_p}{(n+1)\dots(n+p)} + (-1)^{k+1} \int_0^1 g^{(k+1)}(x) \frac{x^{n+k+1}}{(n+1)\dots(n+k+1)}\,\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad v_n = \sum_{p=1}^{k} \frac{\alpha_p}{(n+1)\dots(n+p)} + (-1)^k \int_0^1 g^{(k)}(x) \frac{x^{n+k}}{(n+1)\dots(n+k)}\,\mathrm{d}x}$

Soit $p \in \mathbb{N}$.
La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc $g^{(p)}$ est continue sur $[0,1]$, par conséquent $|g^{(p)}|$ est bornée et atteint ses bornes sur $[0,1]$. Soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de $|g^{(p)}|$. Il vient, comme au 1), au 3) et au 5),

$$\left|\int_0^1 g^{(p)}(x) x^{n+p}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|g^{(p)}(x) x^{n+p}\right|\,\mathrm{d}x \leqslant M \int_0^1 x^{n+p}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{n+p+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 g^{(p)}(x) x^{n+p}\,\mathrm{d}x = o(1)$. Par conséquent,

$$v_n = \sum_{p=1}^{k} \frac{\alpha_p}{(n+1)\dots(n+p)} + o\Big(\frac{1}{n^k}\Big)$$

En effectuant un développement de $\dfrac{1}{(n+1)\dots(n+p)}$ comme au 5), on trouve un développement de v_n de la forme

$$v_n = \sum_{p=1}^{k} \frac{\beta_p}{n^p} + o\Big(\frac{1}{n^k}\Big)$$

De plus $\alpha_1 = \beta_1 = g^{(0)}(1) = g(1)$ et, après un développement identique à celui du 5), $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = -g'(1) - g(1)$.

FIN DE L'ÉPREUVE