Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 3 octobre 2014

Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

A. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$ (cette question est indépendante des suivantes).

b) Calculer W_0 et W_1 et justifier que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

d) En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{2}$.

2) **a)** Montrer que la suite (W_n) est décroissante et que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$.

b) En déduire un équivalent de W_n.

B. Formule de Stirling

On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 2$, par

$$v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$$

1) **a)** Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

b) Exprimer simplement v_n en fonction de n.

c) Donner un développement limité à l'ordre 2 en $\dfrac{1}{n}$ de la suite $(v_n)_n$.

d) En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente.

e) En déduire que les suites $(\ln u_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

2) **a)** En utilisant la question A.1)c), montrer que $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^pp!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. En déduire W_{2p+1} en fonction de p.

b) Déterminer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_p$ à l'aide de l'équivalent de $n!$ trouvé précédemment.

c) En déduire la valeur de K, et, par suite, un équivalent de $n!$.

Exercice 2

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1]$, $g(x) = x \ln x$.

1) Étudier la continuité, la dérivabilité et les variations de la fonction g sur $[0,1]$, puis tracer sa courbe représentative.

2) En déduire que $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$ existe et donner sa valeur.

3) On définit la suite $(t_n)_n$ par $t_0 \in \left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} = -g(t_n)$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$$

4) Rappeler l'inégalité des accroissements finis.

5) Montrer que, pour tout réel $x \in [t_0, e^{-1}]$:

$$0 \leqslant -g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1} - x)$$

Puis que

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

6) En déduire que, pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$

7) Quelle est la limite de la suite $(t_n)_n$?

Exercice 3

1) Rappeler le résultat permettant l'approximation de l'intégrale d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ par les sommes de Riemann.

2) Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

3) Déterminer la limite ,lorsque n tend vers $+\infty$ de $\left(\dfrac{4^n n^n n!}{(2n)!}\right)^{1/n}$

Exercice 4

On introduit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

1) Démontrer que $(u_n)_n$ est une suite monotone (on précisera le sens de monotonie) qui converge vers 0.

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x$$

3) En déduire un équivalent pour la suite $(u_n)_n$.

4) Déterminer des nombres réels α_1, α_2 et α_3 tels que :

$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,\mathrm{d}x$$

5) En déduire des nombres réels α et β que l'on explicitera tels que la suite (u_n) admette un développement de la forme

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

6) Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,1]$. On introduit la suite $(v_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \int_0^1 x^n g(x)\,\mathrm{d}x$$

Démontrer que pour tout entier naturel non nul k, la suite $(v_n)_n$ admet un développement de la forme :

$$v_n = \sum_{p=1}^{k} \frac{\beta_p}{n^p} + o\Big(\frac{1}{n^k}\Big)$$

Exprimer les nombres β_1 et β_2 en fonction de g.

FIN DE L'ÉPREUVE